

Der Sonnenton: Berechnung der äquatorialen Kreisfrequenzen von Schwarzen Löchern der Kerr- Metrik

von

Norbert Böhm

August 5, 2025

HANS COUSTO (GEB. 1948) hat im Jahre 1980 eine einfache aber schön anschauliche Herleitung der Gravitationsfrequenz eines Schwarzen Loches von Sonnenmasse über Gauss und Newton erbracht, von der er den harmonikalen Sonnenton oktaviert hat. Obwohl diese, als *Newtonsche Approximation* bekannte, Lösung auf den Schwarzschildradius R_S und den Gravitationsradius R_G führt, bezieht sie die Allgemeine Relativitätstheorie nicht mit ein und entspricht somit nicht dem Stand der Wissenschaft. Deswegen möchte ich hier seinen Gedanken aufnehmen und über die moderne Kerr-Metrik rotierender Schwarzer Löcher neu formulieren. Dazu wird auch meine, über die Newtonsche Approximation gewonnene, Berechnung der Planckgrößen entsprechend der Kerr- Metrik neu gefasst. Zudem sind wegen des heute genau bekannten Gravitationsparameters GM_\odot der Sonne auch die Ergebnisse sehr genau und könnten nicht nur für die Kunst, sondern auch für die zukünftige Metrologie interessant sein. Schließlich wollen wir fragen was es für unser Weltbild bedeutet, wenn im Zentrum unserer Milchstrasse ein mathematisches Objekt waltet, was ein Schwarzes Loch ja ist. Der Text bezieht sich also mehr auf die Bedeutung der Schwarzen Löcher für Kunst und Kultur.

„Black holes are macroscopic objects with masses varying from a few solar masses to millions of solar masses. To the extent they may be considered as stationary and isolated, to that extent, they are all, every single one of them, described exactly by the Kerr solution. This is the only instance we have of an exact description of a macroscopic object. Macroscopic objects, as we see them all around us, are governed by a variety of forces, derived from a variety of approximations to a variety of physical theories. In contrast, the only elements in the construction of black holes are our basic concepts of space and time. They are, thus, almost by definition, the most perfect macroscopic objects there are in the universe. And since the general theory of relativity provides a single unique two-parameter family of solutions for their description, they are the simplest objects as well.“

SUBRAHMANYAN CHANDRASEKHAR

Contents

Zur Einleitung: Schwarze Löcher - Messen mit dreierlei Maß!	3
1 Die verschiedenen mathematischen Modelle Schwarzer Löcher	4
1.1 Annäherung, Newtonsche Approximation und Planckgrößen	4
1.1.1 Die Annäherung an ein Massezentrum	4
1.1.2 Die Newtonsche Approximation: der Sonnenton nach Hans Cousto	5
1.1.3 Daraus abgeleitet: Die Planckschen Einheitsgrößen	6
1.2 Vier moderne Modelle gemäß der allg. Relativitätstheorie (ART)	6
2 Die Kerr- Metrik, Kreisfrequenzen in der Äquatorialebene	7
2.1 Zur Klärung der Fachbegriffe und Konzepte	7
2.1.1 Geometrisierte Einheiten, Kerr- Parameter a und Thorne- Limit	7
2.1.2 Metriken, stationäre und statische	8
2.1.3 Boyer- Lindquist- Koordinaten, Singularitäten	8
2.1.4 Bewegung auf Weltlinien und Geodäten	8
2.2 Zur Berechnung: metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$, Linienelement und metrische Komponenten	9
2.3 Frame- Dragging: die Rotation der Raumzeit (RZ) bzw. des ZAMOs	10
2.3.1 Mittlere Frame- Dragging- Frequenz ω des ZAMO	10
2.3.2 Extremale Frame- Dragging- Frequenzen Ω_{max} und Ω_{min} abstrahlenden Lichtes	10
2.4 Markante Abstände und Frequenzen: mit a di- und kon- vergierende, konstante	11
2.4.1 Divergierende marginale Kreisbahn- Radien: R_{ms} , R_{mb} , R_{ph}	11
R_{ms} = Radii der marginalen Stabilität (ISCO)	11
R_{mb} = Radii der marginalen Bindung	11
R_{ph} = Radii der marginalen Photonen- Kreisbahnen	11
2.4.2 Divergierende marginale Kreisbahn- Frequenzen: f_{ms} , f_{mb} , f_{ph}	12
Universale Partikel- und Photonen- Kreisfre- quenzen (coordinate time, superflat)	12
Lokale Partikel- Kreisfrequenzen (proper time, curved)	13
2.4.3 Konvergierende Radien: äußerer und innerer Ereignishorizont $R_{H,o}$ und $R_{H,i}$	13
Kreisfrequenzen $f_{H,o}$ und $f_{H,i}$ der beiden Horizonte	14
2.4.4 Konstante Radien: äußere und innere Ergosphäre $R_{E,o}$ und $R_{E,i}$	14
2.5 Kreisfrequenz der Ringsingularität?	14
2.6 Harmonikale Grafiken und Stimmtabellen zu den Schwarzen Löchern von der Masse der Sonne und Sgr A*	19
2.6.1 Grafiken	19
2.6.2 Stimmtabellen	20
2.6.3 Zum supermassiven Schwarzen Loch Sgr A*	27
3 Der Ton der Einheit und die Planck- Kerr- Einheitsgrößen	33
4 Der Sonnenton als Basis eines Oktav- logatithmischen Maßsystems	33
5 Mathematik bestimmt die Physik: Das neue virtuelle Weltmodell	36
References	37



Zur Einleitung: Schwarze Löcher - Messen mit dreierlei Maß!

Eine Frage Herr Physikprofessor: „Wie weit ist es bis zum Zentrum unserer Galaxie, wo in der Region Sagittarius A* ein supermassives Schwarzes Loch waltet?“ Die richtige Antwort lautet: „ca. 26600 Lichtjahre“. Aber diese Antwort ist falsch!

Denn schaut man von hier und misst bis zum Zentrum des Schwarzen Loches, so wird die Raumzeitkrümmung an dessen Ereignishorizont so groß, dass dort nicht nur kein Licht nach außen hin entkommen kann, sondern auch einfallende Lichtstrahlen immer langsamer werden und schließlich im Horizont „stecken bleiben“, ihn scheinbar also niemals erreichen. Deswegen lautet die richtige Antwort: „Von Ferne gesehen: unendlich weit!“. Und wie sieht es aus der Perspektive des Lichtes selbst aus? Nun, für Licht vergeht keine Zeit, es altert nicht, sodass die richtige Antwort lautet: „Aus der Nah- Perspektive des Lichtes gesehen: Null!“. Diese beiden Antworten sind grenzwertig, aber relativistisch richtig. D.h. die Entfernungsangabe in Lichtjahren gerät bei Schwarzen Löchern an ihre Grenze, da sich hier Unendlichkeiten einschleichen.

Die Fangfrage ist also ganz ernst gemeint: mit Einsteins Relativitätstheorie gewinnen wir zwar tiefe Einsichten in den Kosmos, aber wir können nicht mehr einfach messen! Tatsächlich betrachten die Physiker die Raumzeit um ein Schwarzes Loch im geistig- mathematischen Modell ganz ohne andere Massen und da wird sie nach außen hin asymptotisch flach, d.h. sie gleicht sich in der Unendlichkeit an die flache Minkowski- Raumzeit an, ohne diese je zu erreichen. Betrachten wir so einen Lichtstrahl der in das Loch fällt, so stellt man sich einen „Koordinatenbuchhalter“ in unendlicher Entfernung von der Masse vor, der genau misst was er sehen würde und wir nennen seine theoretisch gemessene Zeit die **Koordinatenzeit (coordinate time t)** und sie ist unendlich. Davon unterscheiden wir die lokale **Eigenzeit (proper time τ)** die man messen würde, wenn man mit dem Objekt mitreisen würde - sie ist für Photonen immer Null. Damit haben wir ein geistig- mathematisches Maß, das wir ausschließlich berechnen können, und ein tatsächlich physikalisches Maß, das wir messen würden. Und zum Dritten: Können wir nach Koordinaten der Schwarzloch- Metrik suchen, die den Abstand r vom Zentrum des Schwarzen Loches so bemessen, als wäre der Raum ungekrümmt. Diesen nennen wir den **Koordinatenradius r** , auf ihm bräuchte das Licht bis zu Sgt A* im glatten Raum tatsächlich ca. 26600 Jahre, was eine richtige, aber fiktive Angabe ist, also in Wirklichkeit falsch. Wir werden das Geschehen in **Boyer- Lindquist- Koordinaten** vermessen, zu denen die Koordinatenzeit t und der so verschiedene Koordinatenradius r zählen.

Doch wenn man seine Perspektive abhebt und sich erlaubt das Geschehen aus einem überlagerten, geistigen flachen Raum zu betrachten, so brauchen wir die Komplikation der „unendliche Perspektive“ nicht. Versuchsweise spreche ich dann von „superflacher Perspektive“ (superflat).

Schwarze Löcher sind Kopfgeburten, sie wurden theoretisch berechnet und sie werden immer mathematische Objekte bleiben! Dennoch wird man bald fragen: Was wäre denn die naturgemäße Betrachtung? Gibt es realiter eine absolut flache Raumzeit wo die Uhren maximal schnell in coordinate time gehen? Und die Antwort ist NEIN. Solange irgendwo eine (auch noch so kleine) Masse existiert, krümmt sie die Raumzeit. Die coordinate time ist also ein mathematisches Ideal, aber der einzige kontinuierliche Zeitfluss den wir haben!

Um das etwas tiefer zu verstehen ist die Unterscheidung zwischen Gezeitenpotential und Gravitationspotential wichtig: Im Lagrangepunkt L1 oder im Zentrum eines Sterns haben wir einen „Schwebepunkt“, wo sich die Gravitationskräfte genau ausgleichen, hier ist das Weylsche Gezeitenpotential = 0. Das Gravitationspotential stellt jedoch die Summe der Raumzeitkrümmungen der umliegenden Massen dar und ist im Zentrum eines Sterns maximal. Während das Weyl- Potential in allen Schwebepunkten des Universums also durchaus Null ist, ist das Gravitationspotential im realen Universum niemals ganz Null. Bestenfalls in der Mitte der großen Voids, wo die Distanzen zu den umliegenden Massen (Galaxienhaufen) sehr groß sind, da ist es minimal und hier gehen die Uhren maximal schnell, erreichen aber nie ganz die theoretische coordinate time! Dagegen sind beide Potentiale auf den Ring- Singularitäten Schwarzer Löcher maximal, nämlich unendlich.

D.h. obwohl heute die Beobachtungsdaten die Existenz Schwarzer Löcher vielfach bezeugt haben, können die Physiker nur in der Logik ihres math. Modells von ihnen reden, das sie nie verlassen können! Deswegen möchte ich die gewagte These aufstellen, dass wir hierbei nicht nur über die Mathematik die „Natur“ Schwarzer Löcher verstehen, sondern dass wir vielmehr durch die reale Beobachtung Schwarzer Löcher den geistigen (d.h. math.) Kern der Natur erkennen: Schwarze Löcher sind in der Natur vorkommende math. Objekte!

Dieser Text soll eine Brücke bilden zwischen theoret. Astrophysik und Kultur, insbesondere der Musik. Dazu berechnen wir die Stimmtöne aller relevanten äquatorialen Umlaufperioden um Schwarze Löcher. Der viel größere Impakt der Schwarzen Löcher ist jedoch, das sie math. Objekte sind und bleiben! Bezüglich der wichtigen philosophischen Frage, ob die Mathematik Erfindung oder Entdeckung des Menschen sei, kehren sich damit die Verhältnisse um. Dies wird wahrscheinlich zu einem Paradigmenwechsel unseres Weltbildes führen, was hier noch kurz anzusprechen ist.

1 Die verschiedenen mathematischen Modelle Schwarzer Löcher

Schon der antike Philosoph ARISTOTELES (384 - 322 v.u.Z) hatte mit seinem „Unbewegten Bewegter“, der nur gedanklich zu erkennen sei, eine wage Vorstellung von dem, was wir heute „Schwarzes Loch“ nennen. In der Neuzeit spekulierte der brit. Naturforscher JOHN MICHELL 1783 auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie über „Dunkle Sterne, deren Gravitation Licht gefangen halte“. Unabhängig davon beschrieb auch P. S. LAPLACE die Idee eines „Dunklen Körpers“ im Jahre 1796.

Bevor wir zu den modernen Modellen der ART kommen, möchte ich das Modell der „Newtonischen Approximation“ besprechen, da es, obwohl relativistisch unzureichend, eine erste einfache Vorstellung vermittelt, die schon in die richtige Größenskala führt.

1.1 Annäherung, Newtonsche Approximation und Planckgrößen

1.1.1 Die Annäherung an ein Massezentrum

In unserem Sonnensystem laufen die Planeten quasi stabil auf ihren Bahnen um die Sonne, wobei der äußerste Planet Neptun am langsamsten kursiert. Mit zunehmender Annäherung werden die Planeten immer schneller: Uranus, Saturn, Jupiter, Mars, Erde, Venus bis schließlich Merkur mit der größten Bahngeschwindigkeit die Sonne umläuft. Die Korrelation zwischen den mittleren Abständen a_i und den Umlaufperioden T_i hat JOHANNES KEPLER bereits 1619 in seinem Werk „Die Harmonien der Welt“ formuliert und sie ist heute als das 3. Keplersches Gesetz¹ bekannt: „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier beliebiger Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Abstände“:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (1)$$

Nun fahren wir im Gedankenexperiment fort und betrachten Merkur als virtuellen Planeten und machen ihn mobil, d.h. wir verlegen seine Bahn sukzessive weiter nach innen, was würde passieren? Nun, seine Bahngeschwindigkeit würde sich gemäß K3 weiter erhöhen, doch er würde ab einem Abstand von etwa $\frac{1}{54}$ bzw. $\frac{1}{104}$ seiner ursprünglichen Bahn die Grenze erreichen, an der die Sonnengravitation stärker auf seiner Oberfläche wirkt als seine Eigengravitation, womit die Gezeitenkräfte ihn derart auseinander ziehen würden, dass er zerbröselte. Diese Grenze nennt man die *Roche-Grenze*²

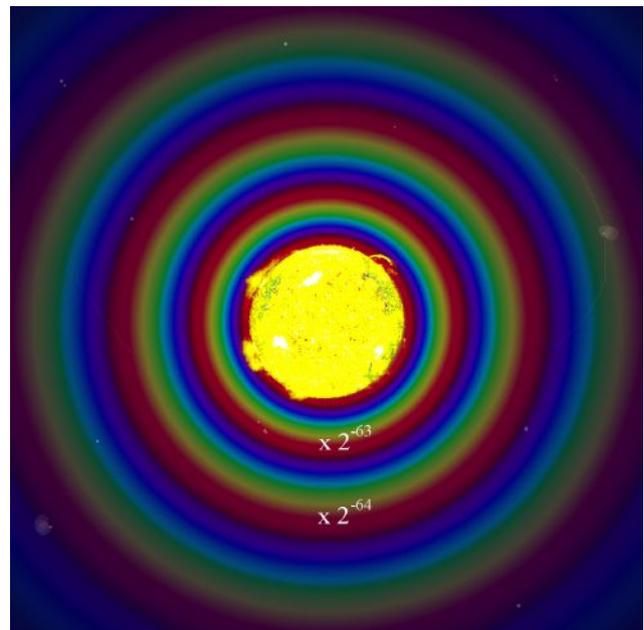
¹Wir werden es im Folgenden mit K3 abkürzen

²Bei der Dichte des Merkur beziehen sich die Abstände $\frac{1}{54}$ bzw. $\frac{1}{104}$ relativ zum Merkurabstand auf das flüssige bzw. feste Modell zur Berechnung der Roche- Grenze

und sie läge für unseren virtuellen Merkur noch weit ausserhalb des Sonnenkörpers bei ca. 1540 bzw. 800 Sonnenradien. Da der Merkur dann nicht mehr als solcher existieren würde, betrachten wir ab jetzt nur noch ein kompaktes massebehaftetes Partikel, das durch seine Struktur, nicht durch seine Eigengravitation zusammengehalten wird. Auf ein solches Partikel wirken im Vakuum ja auch die Newtonschen Gravitationskräfte ein, sodass es sich ebenfalls nach K3 bewegen würde. Wenn wir nun aber von 'Gravitationskräften' sprechen, so wechseln wir über in die Newtonsche Mechanik, in der K3 als die Beziehung zwischen Umlaufperiode T und mittlerem Abstand a allein durch die Masse M der Sonne und die Grav.konstante G dargestellt wird:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (2)$$

K3 bzw. das Newtonsche Gravitationsgesetz lässt sich harmonikal wunderbar durch das *Oktavmandala der Gravitation* darstellen, für welches alle möglichen virtuellen Umlaufperioden in das sichtbare Farbspektrum oktaviert (halbiert) werden, wo sie als oktav- analoge Periodendauern bzw. Wellenlängen der Spektralfarben repräsentiert werden. Auf diese Weise machen wir K3 sichtbar, so wie es sich in der Umgebung des Sonnenkörpers darstellt.



1: Zu sehen ist die Sonne im Oktavmandala der Gravitation, die neg. Oktavzahlen n zeigen den Oktavabstand bis zum sichtbaren Spektrum gemäß unserer Oktavierungsregeln. Flöge ein Partikel auf einer Kreisbahn um die Sonne, so ergäbe seine Umlaufperiode mit dem entsprechenden Oktavfaktor multipliziert die Periodendauer der hier abgebildeten Lichtfarbe. Jede Wiederholung der Kreise gleicher Farbe nach innen entspricht somit einer halbierten Periodendauer. Das Oktavmandala ist also als räuml. Darstellung zeitl. Verhältnisse eine harmonikale (spektrale) Visualisierung von K3. Genau auf dem Sonnenäquator erscheint ein Orangerot von 651 nm.

1.1.2 Die Newtonsche Approximation: der Sonnenton nach Hans Cousto

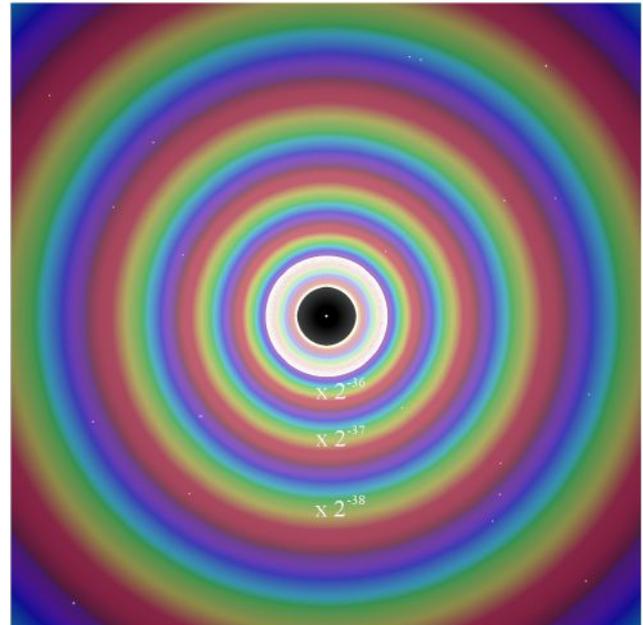
Virtuelle Partikel kursieren auf Kreisbahnen um die Sonne und veranschaulichen uns K3 harmonikal als Oktavmandala. Doch wäre bei weiterer Annäherung auch bald der Sonnenkörper im Wege, sodass wir nun auch die Sonne zu einem abstrakten Massepunkt abstrahieren wollen. Der Raum, wo sonst der Sonnenleib ist, ist in unserem Gedankenexperiment nun ein leerer Raum, der einzig von der Anziehungskraft des Sonnenmassepunktes beherrscht wird. Dann würde nach den Newtonschen Gesetzen sich K3 und das Oktavmandala unendlich nach innen fortsetzen und den Massepunkt doch nie erreichen, wobei das virtuelle Partikel unendlich schnell werden würde...

Nach heutiger Physik stellt jedoch die Lichtgeschwindigkeit c generell die maximale Geschwindigkeit dar. Wenn man demnach die Bahngeschwindigkeit unseres Partikels nur bis c steigern darf, die es jedoch nur erreichen kann wenn es selbst zum Photon wird, so haben wir da den Grenzradius der innersten Lichtkreisbahn gefunden, den man den **Gravitationsradius** R_G nennt. Dieser lässt sich leicht berechnen, wenn man in die bekannte Gleichung der 1. Kosmischen Geschwindigkeit (Kreisbahngeschwindigkeit) für die Geschwindigkeit v nun c einsetzt. Die 2. Kosmische Geschwindigkeit (minimale Fluchtgeschwindigkeit) ergibt in gleicher Weise den sog. **Schwarzschildradius** R_S als Grenzradius der radialen Lichtabstrahlung, also als Ereignishorizont, dessen Radius stets doppelt so groß ist: $R_S = 2R_G$. Diese Newtonische Approximation ist also ein hybrides Modell zwischen Newtonscher Mechanik und ART!

Im Falle der Sonnenmasse wird R_G in der Literatur meist recht ungenau mit etwa $1,476 \text{ km}$ angegeben, denn offenbar beachtet man meist nicht, dass der so genannte Gravitationsparameter der Sonne GM_\odot , der für die Berechnung der Flugbahnen von Raumfahrzeugen sowie der Berechnung von Ephemeriden ganz wesentlich ist, sehr genau bestimmt wird. Denn die Umlaufperiode nach Gl. 2 lässt sich leicht zu $GM_\odot = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$ umstellen, sodass bei genauer Messung der mittleren Abstände a und der Umlaufzeiten T der Planeten GM_\odot sehr genau bestimmbar ist. Derzeit wird der **Gravitationsparameter der Sonne** (heliocentric gravitational constant) sehr genau angegeben:³ $GM_\odot = 1.32712440041279419 \cdot 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$, wobei 10 Stellen valide sind. Zum Vergleich: die genaueste Naturkonstante ist die Rydberg- Konstante der Atomphysik, sie wird auf 12 Stellen angegeben. Damit gehört GM_\odot mit 10 Stellen zu den genauesten Naturkonstanten und es besteht die Hoffnung, dass bei zukünftig noch präziseren Messungen

³From "The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441", published 8.2.2021, most recent value in May 2025.

der Proportionen unseres Sonnensystems, der Gravitationsparameter und alle im Folgenden abgeleiteten Konstanten einmal die genauesten überhaupt werden könnten!



2: Die Abbildung zeigt die nach der N. Approximation gewonnene Vorstellung von einem Schwarzen Loch von Sonnenmasse, um welches das nach K3 absolut selbstähnlich- fraktale *Oktavmandala der Gravitation* gelegt ist. In der Mitte ist die Rotationsachse des Lichtes als Punkt zu sehen, da der Blick senkrecht in die Achse geht. Der innere weiße Kreis bildet die Lichtumlaufbahn (den Lichtkreis) im Inneren des Schwarzen Loches von einem Gravitationsradius R_G . Multipliziert man die Gravitationsfrequenz des inneren Lichtumlaufes mit dem Oktavfaktor $n=-34$, also $\cdot 2^{-34}$, so erhält man die dem Lichtkreis deckungsgleiche Farbe des Mandalas – hier ein Gelbgrün mit $540,2 \text{ nm}$. Dies ist das einzige, was dieses Schwarze Loch von Sonnenmasse als solches im *Oktavmandala* charakterisiert: Die Deckungsgleichheit des inneren Lichtkreises mit dem Farbkreis von $540,2 \text{ nm}$ und die Oktavfaktoren der umliegenden Farbkreise, die nach der Manier der *formula mundi* mit den Zweierpotenzen unterhalb des sichtbaren Farbspektrums beziffert wurden. Das Innere des Schwarzen Loches ist eigentlich nicht sichtbar, da das Licht den Ereignishorizont nicht verlassen kann, der hier wie eine weiße Sphäre vom Schwarzschildradius R_S um den Lichtkreis erscheint. Wir sehen diese Abbildung also mit dem geistigen Auge. Bei dieser N. Approximation gilt K3 bis an den Lichtkreis heran, doch da hier die ART nicht mit einbezogen wird, entspricht dies nicht dem Stand der Wissenschaft!

Die so berechneten genauen Werte für Gravitationsradius $R_{G,\odot}$ und Schwarzschildradius $R_{S,\odot} = 2R_{G,\odot}$ sind:

$$R_{G,\odot} = 1 \cdot \frac{GM_\odot}{c^2} = 1476,6250385094204 \text{ m} \quad (3)$$

$$R_{S,\odot} = 2 \cdot \frac{GM_\odot}{c^2} = 2953,2500770188410 \text{ m} \quad (4)$$

Das 2π -fache des Gravitationsradius' ergibt den Umfang U_G für eine Umkreisung des Lichtes, für die es die Umlaufzeit T_G benötigt, es gilt: $\frac{U_G}{T_G} = c$, sodass sich für die Gravitationsfrequenz der Lichtumkreisung $f_{G,\odot} = \frac{1}{T_G} = \frac{c}{U_G} = \frac{c}{2\pi \cdot R_{G,\odot}}$ ergibt:

$$f_{G,\odot} = \frac{c^3}{2\pi \cdot GM_\odot} = 32312,503410164158 \text{ Hz} \quad (5)$$

Nun hören wir von ca. 16 Hz bis 20000 Hz etwa 10 Oktaven, womit dieser von HANS COUSTO so genannte Sonnenton ein h eine Oktave über dem Hörbereich ist und 8 mal herunter oktaviert in der großen Oktave des Hörbereiches als H mit 126,22 Hz ertönt. Dazu bestimmen wir auch Farbe und Tempo nach unserer harmonikalen Routine:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2^{-38} \cdot c}{f_{G,\odot}} = 540,0453662834992 \text{ nm} \\ f &= \frac{c}{2^{42} \cdot \lambda} = 126,2207164459537 \text{ Hz} \\ B &= \frac{60c}{2^{48} \cdot \lambda} = 118,3319216680816 \text{ Bpm} \end{aligned} \quad (6)$$

1.1.3 Daraus abgeleitet: Die Planckschen Einheitsgrößen

Im Jahre 2006 hatte ich entdeckt, dass sich aus dieser Newtonschen Approximation die Planckgrößen berechnen lassen: Wir betrachten nun Photonen die im Kreise vom Radius R_G rotieren. Ein Photon hat die Quantenenergie $e = h \cdot f$ und damit nach $e = mc^2$ die Quantenmasse:

$$m = \frac{hf}{c^2} \quad (7)$$

Halbiert man die Größe des Loches, so halbiert sich dessen Radius, Umfang und Masse, während sich die Gravitationsfrequenz, die Quantenenergie und -masse aber verdoppelt. Bei fortwährender Verkleinerung ist irgendwann ein einziges Photon so schwer wie die Masse des Loches. Um dies zu berechnen setzen wir die Gravitationsfrequenz von Gl. 5 über die Masse M mit der Quantenmasse m Gl. 7 gleich und stellen nach der Frequenz um:

$${}^\circ f = \sqrt{\frac{c^5}{2\pi Gh}} = 2,9521 \cdot 10^{42} \text{ Hz} \quad (8)$$

Aus dieser Einheitsfrequenz lässt sich die Einheitslänge (Umfang) ${}^\circ \lambda = c/{}^\circ f = 1,0155 \cdot 10^{-34} \text{ m}$ berechnen sowie der Einheitsradius ${}^\circ R = {}^\circ \lambda / 2\pi = 1,6163 \cdot 10^{-35} \text{ m}$, der heute meist ungenau als „Plancklänge“ bezeichnet wird (es ist ein Gravitationsradius). Doch schleicht sich bei dieser Berechnung der Planckschen Einheitsgrößen wieder die allein stehende Gravitationskonstante G ein, sodass die Genauigkeit nur 5 Stellen erreicht.

1.2 Vier moderne Modelle gemäß der allg. Relativitätstheorie (ART)

ALBERT EINSTEIN (1879 in Ulm - 1955 in Princeton) veröffentlichte im Jahre 1905 seine Spezielle und im Jahre 1915 seine **Allgemeine Relativitätstheorie (ART)**. Bis heute sind vier Vakuum-Lösungen (also Lösungen ohne jegliche zusätzliche Materie oder Energie, math. Idealfälle) für die Einsteinschen Feldgleichungen der ART bekannt geworden:

Schon früh mit der Theorie vertraut, fand KARL S. SCHWARZSCHILD (1873 - 1916) im Jahre 1915/6 die erste exakte Lösung für eine ungeladene Punktmasse, die wir heute die **Schwarzschild-Metrik** nennen.

Wenig später entwickelten u.a. HANS REISSNER (1874 - 1967) und GUNNAR NORDSTRÖM (1881 - 1923) die heute nach ihnen benannte **Reissner-Nordström-Metrik** für geladene Punktmassen. Interessant bei diesen ist, dass wenn sie die Bedingung $M^2 = Q^2$ erfüllen (M = Masse, Q = Ladung), sich gravitative Anziehung und elektrische Abstoßung genau ausgleichen: Zwei solche Objekte würden einfach nebeneinander koexistieren.

Im Jahre 1918 beschrieben die Österreicher JOSEF LENSE (1890 - 1985) und HANS THIRING (1888 - 1976) den Einfluss einer rotierenden Masse auf das lokale Inertialsystem: eine rotierende Masse zieht die Raumzeit (RZ) um sich herum mit und verdrillt sie gleichsam. Seitdem war angelegt dass dieser, heute meist als **Frame-dragging** bezeichnete **Lense-Thirring-Effekt** auch bei Schwarzen Löchern (SLern) stattfinden sollte. Denn astronomische Beobachtungen zeigten, dass Sterne aufgrund ihres Entstehungsprozesses meist rotieren, sodass aufgrund der Drehimpulserhaltung nach ihrem Kollaps übrig bleibende Neutronensterne und SLer ebenfalls rotieren sollten...

Aber es sollten fast 50 Jahre vergehen bis der aus Neuseeland stammende Mathematiker ROY PATRICK KERR (geb. 1934) im Jahre 1963 die **Kerr-Metrik** als Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für rotierende SLer gefunden hat. Bei diesen wird der Berechnungsrahmen (der "Frame", also die Geometrie der RZ) mitgezogen, die RZ dreht sich also bei Annäherung immer mehr mit dem rotierenden SL mit. Dieser Effekt ist asymptotisch, d.h. in weiter Entfernung macht er sich quasi nicht bemerkbar (hier ist die RZ quasi flach = Minkowski-RZ), erst in unmittelbarer Nähe steigt die Kurve drastisch an. Ein Kerr-SL wird durch nur zwei Größen vollständig beschrieben: Masse M und Drehimpuls J. In den Gleichungen erscheint jedoch der Drehimpuls J pro Masseneinheit M so oft, dass man dafür ein eigenes Symbol, den *Kerr-Parameter* $a = J/M$ eingeführt hat, der in geometrisierten Einheiten die Dimension der Länge hat. KERR gab seine Entdeckung in eigenen Kerr-Koordinaten an. Doch bald darauf entwickelten seine neuseeländischen Kollegen ROBERT H. BOYER

(1932 - 1966) und RICHARD W. LINDQUIST (geb. 1932) die sehr viel praktischeren, nach ihnen benannten **Boyer-Lindquist-Koordinaten**, die auch wir verwenden werden.

Endlich kombinierte EZRA "TED" NEWMAN (1929 - 2021) im Jahre 1965 diese Ideen und fand eine axialsymmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ein sowohl rotierendes als auch geladenes SL in der **Kerr-Newman-Metrik**. Da diese Metrik die drei Vorgänger-Metriken als Sonderfälle mit enthält, wäre es eigentlich am universalsten, gleich alle Berechnungen in der Kerr-Newman-Metrik durchzuführen. Allerdings setzt uns die Theorie hier Grenzen die Umlaufperioden zu berechnen, da die elektr. Ladung Q nach der ART auch einen Beitrag zur Gravitation liefert und zudem für geladene Teilchen das elektrische Feld dominiert. Die Summe dieser Effekte zu berechnen ist in manchen Fällen nicht ohne weiteres möglich.

Zudem besteht unter der Masse M , des Drehimpulses a und der Ladung Q die Beziehung $M^2 \geq a^2 + q^2$, sodass ein voll rotierendes SL, ein so genanntes „Extrem-Kerr-SL“ mit $a = 1$ keine Ladung hat und ein voll geladenes SL nicht rotiert. Mathematisch lässt sich die Kerr-Newman-Metrik aus der Kerr-Metrik ableiten, indem man statt $2Mr$ in den Boyer-Lindquist-Koordinaten $2Mr - Q^2$ setzt.⁴

Da uns Extrem-Kerr besonders interessieren wird, ist die Ladung hier nicht zu beachten, dennoch ist, wo es möglich war, in den Gleichungen die Ladung Q enthalten, um auch für Kerr-Newman Aussagen treffen zu können: man braucht dort nur $Q = 0$ zu setzen und erhält die Ergebnisse für die Kerr-Metrik. Und auch in der Praxis sind Kerr-Newman-SLer umstritten, da sich die Ladung eines SLs im umgebenden hochleitfähigen Plasma schnell verteilen, also entladen würde. So ist heute die Kerr-Lösung die allgemein favorisierte Theorie in der Astrophysik.

Die vier verschiedenen Modelle SLer in der Reihenfolge ihrer Entdeckung und Komplexität sind:

The 4 BH-Metrics	not rotating, static spherically symmetric Point-Singularity $a = 0$	rotating, stationary axially symmetric Ring-Singularity $a \neq 0$
uncharged $q = 0$	1. Schwarzschild earliest, most simple	3. Kerr most practical relevant $0 \leq a \leq 1$
charged $q \neq 0$	2. Reissner-Nordström $0 \leq q \leq 1$	4. Kerr-Newman latest, most universal theoretical relevant $a^2 + q^2 \leq 1$

1: Die vier prominenten Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für Schwarze Löcher. Die ungeladenen sind reine Vakuumlösungen, die geladenen enthalten dagegen auch elektrische Felder.

⁴Siehe [7] S. 136

2 Die Kerr- Metrik, Kreisfrequenzen in der Äquatorialebene

Wir betrachten hier nur Kreisumläufe und diese gibt es nur in der Äquatorialebene, da bei allen anderen Bahnen von konstantem Abstand die Knoten (Bahnschnittpunkte mit der Äquatorialebene) präzedieren und so keine einfachen Perioden angebar sind. Da zur Vertonung aber nur die Winkel- geschwindigkeit und - periode nötig ist, könnten diese Vertonungen spätere Harmoniker durchaus durchführen.

2.1 Zur Klärung der Fachbegriffe und Konzepte

In der ART haben wir es mit der Raumzeitkrümmung zu tun, durch die Anwesenheit von Massen verändern sich räumliche und zeitliche Abstände im Vergleich zur ungekrümmten RZ. Deswegen haben wir wie eingangs erwähnt auch **dreierlei Maß**: das ungekrümmte geistig- mathematische Maß, auf dem wir denken und rechnen (coordinate radius, ich sage „über der RZ, superflat“), die aus unendlicher Ferne theoretisch gemessene Zeit (coordinate time, „fern der gekrümmten RZ“) und die aus der Nähe gemessene reale Zeit (proper time, „in der gekrümmten RZ“).

2.1.1 Geometrisierte Einheiten, Kerr- Parameter a und Thorne- Limit

Das Grundkonzept der ART ist, dass nicht nur die Längen, sondern auch die Zeiten, die Massen und die anderen (elektrischen, magnetischen, gravitativen oder rotatorischen) Maßgrößen geometrisiert werden, d.h. als Längen dargestellt werden. So auf ein Maß gebracht, kann man sie leicht in der Metrik der Raumzeit miteinander verrechnen. Zusätzlich vereinfacht man das Rechnen indem die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit zu 1 gesetzt werden: $G = c = 1$ (und zur weiteren Vereinfachung oft auch die Masse M), dann spricht man von die *geometrisierten Einheiten*. Damit gibt man die Längen l in Einheiten des Gravitationsradius R_G an und die Zeiten t in Einheiten der Zeit t_G , die das Licht bräuchte um die Strecke R_G zurückzulegen. Für eine Umrechnung in unser übliches SI- System muss man die Ergebnisse dann wieder mit diesen Faktoren multiplizieren:

$$l_{SI} = R_G \cdot l_{geo} \quad \text{wobei} \quad R_G = \frac{GM}{c^2} \quad [m] \quad (9)$$

$$t_{SI} = t_G \cdot t_{geo} \quad \text{wobei} \quad t_G = \frac{GM}{c^3} \quad [s] \quad (10)$$

$$a_{SI} = R_G \cdot a_{geo} \quad (11)$$

Der Kerr- Parameter a in der letzten Gleichung repräsentiert den Drehimpuls pro Masseneinheit in geometrisierten Einheiten: $a = J/M$ ($J =$ Drehimpuls) und wandert von 0 (Schwarzschild) bis 1 (max. Rotation, Extrem- Kerr). Er erscheint im metrischen Tensor und beeinflusst über die metrischen Komponenten die Geometrie der RZ um ein SL. Aber er ist keine Koordinate und hat bezüglich des Koordinatenradius r immer die Länge $r = 0$.

Die beiden Extremfälle $a = 0$ und $a = 1$ sind astrophysikalisch wsl. nicht möglich, erster weil SLer Massen anziehen die zumeist mit eigenem Drehimpuls einfallen, der auf das Loch übertragen wird, und zweiter weil es eine theoretische Obergrenze für die Rotation gibt, das *Thorne-Limit* bei $a = 0,998$, oberhalb dessen wiederum so viel Energie durch Gravitationswellen abgestrahlt wird, dass das SL schrumpft. Dennoch stecken die theoretischen Grenzwerte den Bereich mathematisch möglicher SLer ab und sind für philosophische Überlegungen die wichtigeren Werte, da sie zu zuverlässigen Konstanten führen: Den Drehimpuls eines SLs oder eines Sterns, den man zum SL abstrahieren möchte, wird man niemals auf viele Hinterkommastellen genau angeben können. Setzt man ihn jedoch auf 0 oder 1 hat man eine genaue Vergleichsmöglichkeit aller zu SLern abstrahierten Massen: von der Masse unseres Universums bis hinauf zur Planckmasse. D.h. für die theoretische, philosophische und formale Betrachtung ist dies die Methode der Wahl.

2.1.2 Metriken, stationäre und statische

Das Wort „Metrik“ stammt vom griechischen Wort „metron“ (μέτρον), was „Maß“ oder „Maßstab“ bedeutet. In der ART ist die Metrik die Abstandslehre der gekrümmten RZ, also gleichsam ein Überbegriff dessen einer Sonderfall die Geometrie des glatten Raumes wäre.

In der ART ist die Metrik eine Vakuum- Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, welche die RZ Zeit- unabhängig beschreibt. Wenn sich die Metrik, also die Abstands- Verhältnisse der RZ, nicht mit der Zeit verändern, sagt man sie ist „stationär“, d.h. mit den Polarkoordinaten (t, r, θ, φ) sind die metrischen Komponenten $g_{\mu\nu}(r, \theta)$ nur Funktionen von r und θ aber nicht von t und φ . Dies gilt allgemein für die Kerr- und die Kerr- Newman- Metrik, die alle rotierenden, „bewegten“ SLer durch ihre Masse M und ihren Drehimpuls $a = J/M$ und ggf. ihre Ladung Q vollständig beschreiben. Diese sind axial- symmetrisch (haben eine Symmetrieachse und eine Ringsingularität) und man nennt sie „stationär“, da die metrischen Komponenten $g_{\mu\nu}$ zwar Zeit- unabhängig sind, jedoch nicht symmetrisch unter Zeitumkehr, also im Zeit- Intervall $(t \rightarrow -t)$. Die Rotation und der damit gegebene Drehimpuls führt zum frame- dragging, was Asymmetrien bei der Zeitumkehr erzeugt.

Ohne Rotation erhalten wir die Spezialfälle der Schwarzschild- und Reissner- Nordström- Metrik, die alle nicht- rotierenden, „ruhenden“ SLer allein durch M und ggf. Q beschreiben. Sie sind sphärisch- symmetrisch (haben eine Punkt- symmetrie und -singularität) und sind deswegen nicht nur stationär sondern auch statisch, d.h. sie bleiben auch unverändert bei Zeit- Umkehr: Die metrischen Komponenten $g_{\mu\nu}$ sind nicht nur Zeit- unabhängig sondern auch symmetrisch im Zeit- Intervall $(t \rightarrow -t)$.

2.1.3 Boyer- Lindquist- Koordinaten, Singularitäten

Die Boyer- Lindquist- Koordinaten (t, r, θ, φ) sind ein spezielles Polarkoordinatensystem, das an die Kerr- Metrik angepasst ist: $t =$ coordinate time, $r =$ coordinate radius, $\theta =$ Breitenwinkel (Polarwinkel, Kolatitude), $\varphi =$ Längewinkel (Azimut, Latitude). Diese Koordinaten werden am meisten genutzt, sie reduzieren sich auf die Schwarzschild- Koordinaten wenn der Spin- Parameter $a = 0$ ist.

Singularitäten sind Punkte, an denen die RZ unendlich gekrümmt ist. In der Kerr- Metrik gibt es zwei Arten von Singularitäten: scheinbare und echte.

Scheinbare Singularitäten sind mathematische Artefakte des Koordinatensystems. Die Boyer- Lindquist- Koordinaten haben sie an den Polstellen (also über den Polen der Rotationsachse bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$) und am Ereignishorizont. Diese Koordinatensingularitäten können durch die Wahl eines anderen Koordinatensystems (z.B. Kerr- Schild- Koordinaten) beseitigt werden.

Echte Singularitäten sind als physikalische Singularitäten unabhängig vom Koordinatensystem. Die Kerr- Metrik hat eine solche im Zentrum bei $r = 0$, sie entspricht einer äquatorialen Ringsingularität (bei Schwarzschild wird diese zum Punkt). Hier ist die Krümmung der RZ tatsächlich unendlich und die physikalischen Gesetze gelten nicht mehr.

2.1.4 Bewegung auf Weltlinien und Geodäten

In der ART nennen wir die möglichen Bewegungswege zwischen zwei RZ- Punkten ganz allgemein „Weltlinie“, doch unterscheiden wir weiter, ob Kräfte auf das Objekt wirken (etwa ein Raketenantrieb auf eine Rakete) oder nicht.

Der Begriff „Geodäte“ kommt aus der Erdvermessung und beschreibt den kürzesten Weg zwischen zwei Orten auf der Erdoberfläche, der hier ja keine gerade Linie ist sondern ein Kreisbogen. Übertragen auf die ART ist eine Geodäte die kürzeste Verbindungskurve zwischen zwei Punkten in der RZ, die ein kräftefrei fallendes Objekt nehmen würde: Es fällt entlang gekrümmter Linien. Deswegen untersuchen wir Geodäten, wenn wir die Umlaufbahnen und -perioden um SLer finden wollen. Wir unterscheiden zeitartige, raumartige und Null- Geodäten:

Zeitartige Geodäten Zeitartige Geodäten sind Trajektorien (Bahnen) in der RZ, auf denen Objekte mit Ruhemasse fallen, für die dabei Zeit vergeht. Planeten oder massebehaftete Partikel fallen stets mit Unterlichtgeschwindigkeit $v < c$, sodass das Raumzeit- intervall (das zeitliche Intervall zwischen zwei Punkten, die das Objekt nacheinander durchläuft) negativ ist. Beispiele: elliptische, kreisförmige, spiralförmige oder andere Bahnen von massebehafteten Objekten um SLer.

Null- Geodäten Null- Geodäten sind Trajektorien in der RZ, auf denen Objekte ohne Ruhemasse fallen, für die dabei keine Zeit vergeht. Etwa wenn ein Photon mit c reist, vergeht keine Zeit für es: Licht altert nicht. Deswegen beschreiben Null- Geodäten die Bahnen von Photonen und anderen masselosen (auch hypothetischen) Objekten, dessen RZ-intervall exakt Null ist. Beispiele: Generell alle Lichtwege und hier besonders die Photonenbahnen um SLer (Photonensphäre).

Raumartige Geodäten Raumartige Geodäten sind Bahnen in der RZ, auf denen die räumliche Separation größer ist als die zeitliche, womit das RZ- intervall positiv wird. Sie repräsentieren jedoch keine physikalisch möglichen Bahnen, da Objekte hier schneller fallen würden als c , was die ART verbietet. Dennoch sind es mathematische Lösungen die uns die Struktur der RZ näher offenbaren. Solche hypothetischen Bahnen können uns als Teil eines Diagramms helfen, die RZ um SLer besser zu verstehen.

2.2 Zur Berechnung: metrischer Tensor $g_{\mu\nu}$, Linienelement und metrische Komponenten

In der ART werden mithilfe der Metrik die superflachen Koordinaten t und r (coordinate time & coordinate radius) in die physik. Koordinaten (proper time, proper distance) der gekrümmten RZ umgerechnet, da es also um eine Koordinatentransformation geht, könnte man auch von einer „Transformationsmetrik“ sprechen. Die Metrik ist also eine Art „Maßstab“ zwischen den mathematischen Koordinaten- Maßen (superflat) und den physikalischen Eigen- Maßen, der sich bei der Annäherung an Massen immer mehr verändert.

Das mathematische Kernstück der Metrik ist der **metrische Tensor**⁵ $g_{\mu\nu}$ (Indices $\mu =$ „my“ und $\nu =$ „ny“) der als ‚Abstandstensor‘ beschreibt, wie Längen und Zeiten in der RZ gemessen werden. Genauer gesagt codiert er die Metrik der RZ, indem er die Distanz (das Intervall) zwischen zwei infinitesimal

⁵Nicht zu verwechseln mit dem Riemann- Tensor, der die Ableitung des metrischen Tensors ist und die Krümmung der Raumzeit beschreibt.

nahe beieinander liegenden Punkten angibt. Für eine 4D- RZ ist der metrische Tensor eine symmetrische 4×4 - Matrix: Man liest den Tensor zeilenweise, jede Zeile t, r, θ, ϕ gibt an, wie sich eine Koordinate mit sich selbst und den anderen Koordinate kreuzt, ungekoppelte Koordinaten ergeben 0:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\phi} \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{\phi t} & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dabei bedeuten die einzelnen Komponenten, wie sehr jede Maßdimension in der gekrümmten RZ im Vergleich zur flachen RZ skaliert wird: g_{tt} - Einfluss der Zeitdilatation, $g_{t\phi}$ - Kopplung zwischen Zeit t und Winkel ϕ (Frame- Dragging), g_{rr} - radiale Längenkontraktion, $g_{\theta\theta}$ - Skalierung des θ - Winkels, $g_{\phi\phi}$ - Skalierung des ϕ - Winkels. Diese Komponenten liefern die dimensionslosen Faktoren für die einzelnen Maßdimensionen. Um ihren Anteil am Linienelement ds^2 zu erhalten, werden sie auf ihre Differenzialformen d_μ angewendet ($g_{tt}dt^2$ usw.), wo sie alle in geometrisierten Einheiten die Dimension der Länge haben, sodass man sie addieren kann. Summiert man sie zusammen, erhalten wir das so genannte Linienelement ds^2 der Kerr- Metrik als Separation zwischen zwei infinitesimal nahe beieinander liegenden Ereignissen (Punkten) der gekrümmten RZ in allen vier Koordinaten x^μ und x^ν , was durch die Boyer- Lindquist- Polarkoordinaten jedoch als Differenzen in Zeit, Radius, Polarwinkel und Äquatorialwinkel: t, r, θ, ϕ aufgelöst wird.

Der Begriff „Linienelement“ ist anfangs etwas irreführend, da er zuerst nur an eine Differenz der Länge s denken lässt, tatsächlich aber sind damit die Differenzen in allen Raum- Winkel- und Zeit- Richtungen berechenbar, die durch die Metrik linearisiert wurden, sodass das Krümmungsverhalten in allen Dimensionen erfasst wird.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (13)$$

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \quad (14)$$

3: **Die Kerr- Metrik** als Verhältnis des Linienelementes ds^2 zwischen zwei infinitesimal nahe beieinander liegenden Ereignissen (Punkten) und den Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ prinzipiell und konkret eingesetzt. Die Gleichung ist das zentrale Organon zur Berechnung der rotierenden Raumzeit und ermöglicht die Beantwortung aller Fragen bezüglich Abständen, Winkeln, Bahnen, Zeiten, Energien usw.

$g_{tt}dt^2$ - Der Zeitterm beschreibt, wie stark die Zeitdilatation ist.

$g_{t\phi}dtd\phi$ – Der Mischterm beschreibt die rotierende RZ und den Frame- Dragging- Effekt.

$g_{rr}dr^2$ – Der Radialterm beschreibt die Längenkontraktion in radialer Richtung.

$g_{\theta\theta}d\theta^2$ und $g_{\phi\phi}d\phi^2$ – Die Winkelterme beschreiben die Krümmung in den Winkelrichtungen.

Die folgenden, dann in Boyer- Lindquist- Koordinaten erhaltenen **metrischen Komponenten** kann man sich als Skalarfelder vorstellen, welche die Informationen über die Symmetrie der RZ enthalten. Die Gleichungen zeigen links die generellen Komponenten (wobei $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, $p = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$), rechts neben dem Pfeil dieselben reduziert auf die uns interessierende äquatoriale Ebene (bei $\theta = \pi/2$ und Ladung $Q = 0$ ist $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ und $p = r$)⁶:

$$g_{tt} = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right) \Rightarrow - \left(\frac{\Delta - a^2}{r^2} \right) \quad (15)$$

$$g_{rr} = \frac{p^2}{\Delta} \Rightarrow \frac{r^2}{\Delta} \quad (16)$$

$$g_{\theta\theta} = p^2 \Rightarrow r^2 \quad (17)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\left((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta}{p^2} \Rightarrow \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2}{r^2} \quad (18)$$

$$g_{t\phi} = \frac{a \sin^2 \theta (\Delta - r^2 - a^2)}{p^2} \Rightarrow \frac{a (\Delta - r^2 - a^2)}{r^2} \quad (19)$$

Auf der Ebene der Boyer- Lindquist- Koordinaten erfolgen dann die analytischen Ableitungen der Eigenschaften innerhalb der Kerr- Metrik. Für Visualisationen in Plots und Animationen transformiert man die Boyer- Lindquist- Koordinaten meist in kartesischen Koordinaten, wobei es mehrere Transformationsmöglichkeiten gibt (siehe z.B. die Grafik 5 S. 15).

2.3 Frame- Dragging: die Rotation der Raumzeit (RZ) bzw. des ZAMOs

Wir gehen jetzt in die Bewegung: Unter dem ZAMO (Zero Angular Momentum Observer) versteht man einen theoretischen Beobachter, der sich relativ zur ihn umgebenden RZ nicht bewegt. Bei statischen RZen ruht dieser trivialerweise. Bei rotierenden RZen dagegen bewegt er sich genau so schnell wie die RZ um ihn herum, sodass man relativ zum Zentrum des Kerr- SLes sehr wohl eine Winkelgeschwindigkeit ω berechnen kann. Da die RZ aber hinein spiraliert, beschleunigt der ZAMO langsam und ω wächst an, sodass der Wert von $\omega_{r,\theta}$ nur in einem bestimmten

Abstand r und an einem Polarwinkel θ gilt, wobei wir nur die Äquatorialebene betrachten wollen wo $\theta = \pi/2$ ist und wo der Frame- Dragging- Effekt ja auch am stärksten ist. Damit ist ω eine Momentaufnahme und die daraus abzuleitende Umlaufperiode $T = 2\pi/\omega$ und Frequenz $f = 1/T$ sind keine echten Perioden oder Frequenzen sondern Extrapolationen der Momentaufnahme auf 360° . Dies gilt auch für die folgenden Ω_{max} und Ω_{min} , die man auch vertonen könnte, wir behandeln sie aber nur, um SLer besser zu verstehen.

2.3.1 Mittlere Frame- Dragging- Frequenz ω des ZAMO

Die Winkelgeschwindigkeit ω der rotierenden RZ (bzw. eines ZAMOs ohne Eigenbewegung in ihr) ist nur in unmittelbarer Nähe des SLes signifikant, sie nimmt mit etwa $1/r^3$ ab, sodass die RZ in weiter Entfernung quasi ruhend ist. Für die Äquatorialebene ($\theta = \pi/2$) setzen wir die reduzierten metrischen Komponenten aus Gl. 19 und 18) ein und erhalten:⁷

$$\omega_{(r,\theta)} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau} = - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (20)$$

$$= \frac{2Mar}{r^3 + a^2r + 2Ma^2} \quad (21)$$

Dies ergibt die Winkelgeschwindigkeit ω eines ZAMOs, der im äquatorialen Frame im Abstand r mitgezogen (to dragg) wird, d.h. wir haben das Phänomen einer Winkelgeschwindigkeit (in superflat coordinate time) ohne Drehmoment (zero angular momentum in proper time)!

2.3.2 Extremale Frame- Dragging- Frequenzen Ω_{max} und Ω_{min} abstrahlenden Lichtes

Um die Grenzen möglicher äquatorialer Winkelgeschwindigkeiten zu erfassen, betrachten wir hier nur Photonen wegen ihrer maximalen Geschwindigkeit. Langsamere Partikel- Geschwindigkeiten lassen sich aber auch so berechnen. Betrachten wir also Photonen, die transversal genau in Richtung und entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des ZAMOs in der RZ mit c abgestrahlt werden, so erhalten wir die maximal und minimal mögliche Koordinaten- Winkelgeschwindigkeit Ω im Moment der Emission:

$$\Omega_{max,min} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (22)$$

Es handelt sich hier um summarische Winkelgeschwindigkeiten, die die Eigenbewegung eines Photons in der RZ zu der mit ω rotierenden RZ (des ZAMOs) hinzu addieren oder von ihr abziehen. In weiter Entfernung vom Loch ist ω

⁶Aus [4] S. 878 bzw. 893

⁷Die Frame- dragging- Gleichungen bei [4] S. 893/4

quasi Null und die Eigenbewegung des Lichtes (der Wurzelterm) ist quasi die gesamte Bewegung. Je näher man dem Loch jedoch kommt, desto dominanter wird die Rotation der RZ, sodass ω die Eigenbewegung des Photons immer mehr überlagert, bis der Frame- Drag am stationären Limit bei $r = 2$ (äußere Ergosphäre) schließlich so stark wird, dass die min. retrograde Eigenbewegung gänzlich verschwindet: retrograde Photonen stehen scheinbar still ($\Omega_{min} = 0, \Omega_{max} = 2\omega$). Und schließlich direkt am Horizont dominiert der Framedrag absolut, sodass retro- und prograde Photonen mit der selben Geschwindigkeit rotieren wie der frame, man nennt dies die Rotationsfrequenz des Horizontes Ω_H oder generell die des Schwarzen Loches: $\omega_H = \omega = \Omega_{min} = \Omega_{max}$.

Auf den Grafiken S. 16ff kann man das Verhalten dieser Winkelgeschwindigkeiten bzw. Perioden studieren.

2.4 Markante Abstände und Frequenzen: mit a di- und kon- vergierende, konstante

Es bietet sich an die Betrachtung der markanten Radien so zu gliedern, dass wir zuerst das ruhende Loch ($a = 0$) betrachten und dann den Kerr-Parameter a langsam aufdrehen, bis wir schließlich Extrem- Kerr bei $a = 1$ erreichen. Dann kann man die markanten äquatorialen Radien grob in außen divergierende, innen konvergierende und konstante Radien einteilen. Diese Einteilung wird aus der Grafik 4 S. 15 verständlich.

2.4.1 Divergierende marginale Kreisbahn- Radien: R_{ms}, R_{mb}, R_{ph}

Wie die Grafiken auf S. 17f und S. 21 zeigen, sind die Umlaufbahnen bei ruhenden SLern ($a = 0$) exakte Keplerbahnen, die wir mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz beschreiben können. Nur gibt es hier nach der ART die innere Grenze des Radius' der marginalen Stabilität R_{ms} bei $r = 6$, bis an den heran diese Bahnen stabil sind, und weiter innen den Radius der marginalen Bindung R_{mb} bei $r = 4$ bis an den heran sie instabil existieren, bis nach demselben Gesetz der instabile Photonenorbit bei $r = 3$ folgt. Beginnen wir die Rotation, splitten sich diese Radien durch das Frame- Dragging in retrograde und prograde Richtungen auf, wobei K3 bzw. das Newtonsche Gravitations- Gesetz modifiziert wird.

R_{ms} = Radii der marginalen Stabilität (ISCO)
Die dynamischen Grenzen außerhalb welcher Bahnen stabil sind. Das ruhende Loch hat eine zentrale Punktsingularität, sodass Partikel hier in allen Neigungen auf unendlich vielen Kreisbahnen bei $r = 6$ um das Loch rotieren können. Beginnen wir die

Rotation, so bildet sich sogleich eine Rotationsachse aus und eine Äquatorialebene, auf der sich der $R_{ms} =$ ISCO = „Innermost Stable Circular Orbit“ aufsplittet in einen äußeren retrograden und einen inneren prograden, die dann mit zunehmender Rotation weiter voneinander divergieren und bei Extrem- Kerr außen $r = 9$ und innen $r = 1$ annehmen. Es handelt sich hierbei um den inneren Rand (Margin), an dem die stabilen Rotationen enden, was in der Praxis der Astrophysik bedeutet, dass hier auch die vorhersagbare Rotation der Akkretionsscheibe endet. Zur Berechnung brauchen wir zwei Hilfsformeln Z_1 und Z_2 , in der folgenden Formel für R_{ms} steht das obere + Zeichen für den äußeren, retrograden Orbit, das untere - Zeichen für den inneren, prograden:⁸

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \left(1 - \left(\frac{a}{M}\right)^2\right)^{1/3} \cdot \left(\left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/3}\right) \\ Z_2 &= \sqrt{3\left(\frac{a}{M}\right)^2 + Z_1^2} \\ R_{ms} &= M \left(3 + Z_2 \pm \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right) \end{aligned} \quad (23)$$

Innerhalb des ISCO sind die modifizierten Keplerbewegungen mathematisch zwar noch möglich, sie sind aber nicht mehr stabil, sondern gleichen einem Balanceakt über einen Grat, sodass jede leichteste Irritation sie auf Spiralbahnen entweder in das Loch hinein fallen oder nach außen hinfür führen ließe.

R_{mb} = Radii der marginalen Bindung Die energetischen Grenzen innerhalb welcher Bahnen gebunden sind. Eine einfache Beschreibung wäre: Ausserhalb des R_{mb} überwiegt die positive kinetische Energie, sodass ein kursierendes Partikel genug Energie hätte um aus dem Gravitationsfeld des Loches zu entkommen. Innerhalb des R_{mb} überwiegt die negative kinetische Energie, sodass ein Partikel nicht genug Energie hätte um entkommen zu können, es würde unwiderruflich hinein spiralisieren. An der Grenze der marginalen Bindung ist die Gesamtenergie des kursierenden Partikels genau Null. Die Radii der marginalen Bindung lassen sich in der Äquatorialebene wie folgt berechnen:

$$R_{mb} = \left(\sqrt{M} \cdot \sqrt{M \pm a}\right)^2 \quad (24)$$

Das obere + Zeichen ergibt wieder den äußeren, retrograden Orbit an, siehe Grafik S. 15.

R_{ph} = Radii der marginalen Photonen- Kreisbahnen
Die dynamischen Grenzen zwischen denen instabile, aber theoretisch ewige Photonenbahnen möglich sind. Die so begrenzte Photonensphäre ist sicher eines der ästhetischsten Phänomene Schwarzer Löcher! Beim ruhenden SL gibt es keine Äquatorialebene und damit

⁸Wir ordnen das Geschehen indem wir uns von außen annähern.

nur genau einen Abstand bei $r = 3$, auf dem Photonen in allen Neigungswinkeln auf genauen Kreisbahnen um das SL kursieren können. Man spricht hier von einer *Photonenschale* oder *Photonensphäre*. Beginnt die Rotation, bildet sich sofort eine Äquatorialebene aus und die Photonensphäre spannt sich zu einer in r breiten *Photonenregion* auf, bei der nur noch an den Rändern Photonen- Kreisbahnen in der äquatorialen Ebene existieren und zwar außen retro- und innen prograd. Im theoretischen Fall der maximalen Rotation (Extrem- Kerr mit $a = 1$) fällt die äußere retrograde Photonenkreisbahn auf genau $r = 4$ und die innere prograde auf $r = 1$, siehe Grafik 4 auf S. 15.

Dazwischen dreht sich der Durchtrittswinkel der Photonenbahnen durch den Äquator (äquatorialer Inklinationwinkel I) von den äußeren $I = 180^\circ$ (retrograde Lichtkreisbahn) mit abnehmenden r über alle Zwischenwinkel auf $I = 0^\circ$ der inneren prograden Lichtkreisbahn. Dennoch bleibt $r = 3$ immer ein besonderer Abstand, da hier die Photonen stets senkrecht den Äquator durchqueren: $I = 90^\circ$.

Uns interessieren hier nur diese Grenzfälle der äquatorialen Kreisbahnen, da zwischen ihnen nicht nur die Rotationsebene um 180° dreht, sondern auch die Knoten (Durchtrittspunkte durch die Äquatorialebene) wandern, sodass es eigentlich keine wiederkehrenden Perioden gibt. Mit folgender Formel lassen sich die Radien dieser marginalen äquatorialen Photonenkreisbahnen berechnen (für Kerr ist die Ladung $Q = 0$):

$$R_{ph} = 2M \left(1 + \cos \left[\frac{2}{3} \arccos \left(\mp \sqrt{\frac{a^2 + Q^2}{M^2}} \right) \right] \right) \quad (25)$$

(–retrograd) All diese Photonenbahnen sind jedoch instabil, da die Photonen zum einen ganz präzise auf die Bahnen einstrahlen müssten (was sehr unwahrscheinlich ist), und zum anderen würden sie bei jeder leichtesten Irritation wieder auf Spiralbahnen abgelenkt werden und in das Loch hinein fallen oder selbiges verlassen.

Beachtenswert ist, dass für die Kerr- Newman-Metrik die Bedingung $a^2 + Q^2 \leq M^2$ gilt. Damit ergibt die Formel für das Reissner- Nordström- Loch mit $a = 0$ und $Q = 1$ die gleichen Ergebnisse für äquatoriale Photonenkreisbahnen wie das Extreme Kerr- Loch mit $a = 1$ und $Q = 0$! Da ihm jedoch die Symmetrieachse fehlt, können die beiden extremale Photonenkreisbahnen hier in allen beliebigen Richtungen liegen, d.h. es existieren zwei Photonensphären!⁹

⁹Am besten verdeutlicht man sich diese Zusammenhänge am Modell der Lichtbahnen um SLer von Prof. Dr. Leo C. Stein, zu finden auf der Wikipedia- Website "Kerr-Metrik" derzeit unter Einzelnachweis 46 oder über die direkte URL: <https://duetosymmetry.com/tool/kerr-circular-photon-orbits/>. Bitte entdecken sie auf dieser Website die Grafik und spielen Sie etwas mit den Reglern für a und r herum. Dann klicken Sie auch mit der linken Maustaste auf die Grafik und bewegen Sie die Maus und drehen dadurch ihre

2.4.2 Divergierende marginale Kreisbahn-

Frequenzen: f_{ms} , f_{mb} , f_{ph}

Universale Partikel- und Photonen- Kreisfrequenzen (coordinate time, superflat) Die folgende Gleichung für die Koordinaten- Winkelgeschwindigkeit Ω eines Partikels auf einer Kreisbahn in der äquatorialen Ebene ist für uns sehr wichtig, ihre Herleitung würde aber das Anliegen dieser Arbeit übersteigen.¹⁰ Sie gilt streng nur für Bahnen ausserhalb des $R_{ms} = ISCO$:

$$\Omega_{R,P} = \mp \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{R^3} \mp a\sqrt{M}} \quad \text{für } R \geq R_{ms} \quad (26)$$

Aus Ω lässt sich leicht die Umlaufperiode $T = 2\pi/\Omega$ und die Kreisfrequenz $f = 1/T = \Omega/2\pi$ berechnen, insbesondere für die Radien R_{ms} , R_{mb} und R_{ph} . Die Umrechnung in SI- Einheiten erfolgt über den Faktor t_G (Gl. 10). Aber schauen wir genauer in die Gleichung: Das – Zeichen steht für Retrograde und das + Zeichen für Prograde Bewegungen und man macht die kontraintuitive Feststellung, dass die retrograde Bewegung gegen die Rotation der RZ schneller geht als die prograde mit dem Framedrag! Aber dies ist tatsächlich so und wird im Vergleich zum gravitomagnetischen Modell verständlich, wo ein Pro- Partikel eine zentripetale gravitoelektrische Kraft erfährt aber eine

Perspektive, zoomen Sie scrollend rein und raus und führen Sie eine perspektivische Translation durch Rechtsklick und Mausbewegung durch. Wenn Sie sich so spielerisch etwas mit der Animation vertraut gemacht haben, gehen Sie nun taktisch vor: Drehen Sie die a - und r - Regler ganz auf und sehen Sie die größtmögliche retrograde Photonenkreisbahn für Extrem- Kerr bei $r = 4$. Nun Links- klicken Sie die Grafik an und drehen Sie sie so, dass sie senkrecht zur Achse genau auf den Äquator schauen (den Sie ja durch die größte retrograde Lichtreisbahn schön sichtbar gemacht haben). Nun regen Sie r auf 3 runter und sehen Sie die Lichttrajektorien genau senkrecht durch den Äquator (Mitte) gehen. Stellen Sie auch andere a 's ein und regeln Sie r auf 3 nach: immer laufen die Lichtbahnen bei $r = 3R_G$ senkrecht durch den Äquator.

Am Modell von PROF. STEIN kann man sich eine genaue Vorstellung davon bilden, dass im Spezialfall $a = 0$ nur eine Photonen- Kugelschale bei $r = 3$ aller möglicher Inklinationwinkel existiert (im Modell durch nur eine senkrechte Kreisbahn veranschaulicht), für alle $a \neq 0$ spaltet sich diese Schale nach außen und innen auf, wobei ganz außen eine retrograde und ganz innen eine prograde äquatoriale Lichtkreisbahn existiert, und in dem Zwischenbereich von r dreht sich der Inklinationwinkel der äquatorialen Lichtpassage sukzessive um 180° , wobei $r = 3$ ein Mittel oder Spiegel darstellt, wo die Lichtbahnen stets senkrecht durch den Äquator laufen! Das ist beeindruckend und sehr ästhetisch. Und wenn Sie mögen machen sie noch eine Zusatzübung: drehen Sie das Modell hoch, sodass Sie von oben genau in die Achse schauen. Stellen Sie $a = 0$ und die 'History lenght' auf voll. Nun drehen Sie langsam r rauf und sehen Sie (neben den vielen, mit Sicht in die Achse erscheinenden, schönen Figuren), dass die Lichtbahnen nie durch die Achse selbst gehen sondern erst eine kleine Öffnung um die Achse bilden, die mit steigendem a größer wird. Magic! Um dabei konstant $r = 3$ zu halten, muss man r nachregeln... Und bitte beachten Sie auch die dort beschriebenen Beschränkungen des Modells:)

¹⁰Die Gleichung z.B. bei [6] S. 11, die Herleitung z.B. bei [2] S. 336 oder [7] S. 107.

zentrifugale gravitomagnetische. Deswegen ist hier die zentripedale Gesamtkraft kleiner als für ein Retro- Partikel, wo sie größer ist und wo deswegen eine größere Winkelgeschwindigkeit nötig ist um sie auszugleichen.¹¹

Lokale Partikel- Kreisfrequenzen (proper time, curved) Bisher betrachteten wir rotierende Partikel aus der idealen Unendlichkeit des math. Modells, d.h. in coordinate time bzw. from superflat. Aber durch die Krümmung der RZ kommt der Effekt der gravitativen Zeitdilatation ins Spiel, sodass eine Uhr auf dem rotierenden Partikel selbst viel langsamer tickt, nämlich in lokaler Eigenzeit = proper time.

Die Transformationsformel von *coordinate time* in *proper time* wird aus dem Linienelement der Kerr- Metrik abgeleitet. Für eine Kreisbewegung ($dr = 0$) in der äquatorialen Ebene ($\theta = \pi/2, d\theta = 0$) verschwinden r- Term und θ - Term im Linienelement ds . Dazu verhält sich die Eigenzeit $d\tau$ eines Partikels zum Raumzeitintervall ds nach $d\tau^2 = -ds^2$. So erhalten wir aus dem Linienelement (Gl. 13) die folgende Gl. 27. Und da für die Kreisbewegung eines Partikels die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = d\phi/dt$ ist und damit $d\phi = \Omega \cdot dt$, so kommen wir auf die Gl. 28:

$$d\tau^2 = - \left(g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2 \right) \quad (27)$$

$$= - \left(g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt (\Omega dt) + g_{\phi\phi} (\Omega dt)^2 \right) \quad (28)$$

Nach Ausklammern von dt^2 und Wurzelziehen schreiben wir die Eigenperiode (proper time) als $d\tau \hat{=} T_p$ und die Periode gesehen aus der Unendlichkeit (coordinate time, superflat) als $dt \hat{=} T_c$ und erhalten die folgende Gl. 29.¹² Sodann setzen wir die metrischen Komponenten für die äquatoriale Ebene (Gl. 15, 18, 19 von S. 10) ein und kürzen etwas, sodass wir als Verhältnis von Eigenperiode T_p zur Koordinatenperiode T_c die Gl. 30 erhalten.

$$T_p = T_c \cdot \sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2} \quad (29)$$

$$= T_c \cdot \frac{\sqrt{1 \mp 2a\sqrt{\frac{M}{r^3}} - \frac{3M}{r}}}{1 \mp a\sqrt{\frac{M}{r^3}}} \quad (30)$$

Schließlich ist $T_c = 2\pi/\Omega_{R,p}$, sodass wir mit Gl. 26 die Gl. 31 erhalten. Und da wir für die Farbmandalas der Grafiken auf S. 21f bzw. S. 29 die Umlaufperioden gleich halten und die verschiedenen Abstände r zeigen wollen, lösen wir dafür numerisch nach r auf, was für $M=1$ noch einfacher ist (Gl. 32).

Das obere - Zeichen steht für retro- das untere + Zeichen für prograd. Beachte aber, dass die Retrograde Winkelgeschwindigkeit Ω_R negativ erscheint und so auch $T_{R,c}$ und $T_{R,p}$, sodass wir für stets positive Perioden um die letzten Formel noch Betragstriche setzen müssen.

¹¹Vgl. [5] S. 430

¹²Vgl. [4] S. 895

$$T_p = \mp 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{M} \mp 2a\sqrt{\frac{r^3}{M}} - 3r^2} \quad (31)$$

$$= \mp 2\pi r \cdot \sqrt{r \mp 2a\sqrt{\frac{1}{r}} - 3} \quad (32)$$

Erwähnenswert ist noch, dass es zur Eigenzeit τ auch einen Eigenradius R , „umfangbezogener Radius“ genannt gibt: $R = \sqrt{g_{\phi\phi}} = \sqrt{r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}}$, der für Extrem- Kerr $a = 1, r = 1$ auf $R = 2$ fällt. Doch er ist für Frequenzberechnungen soweit nicht nötig.

2.4.3 Konvergierende Radien: äußerer und innerer Ereignishorizont $R_{H,o}$ und $R_{H,i}$

Der Ereignishorizont liegt beim Sonderfall des statischen Loches bei $r = 2$. Beginnt die Rotation, so wandert dieser äußere Horizont nach innen und aus der inneren Punktsingularität entsteht ein zweiter Horizont mit Cauchy- Fläche, der von innen nach außen wächst, bis sich beide bei max. Rotation bei $r = 1$ treffen und koinzidieren.

Bei $a = 0$ ist der äußere Horizont eine ideale Kugelschale, die sich bei Rotation aber immer mehr verändert. Zwar sind die Horizonte gemäß der folgenden Gl. hinsichtlich des Koordinatenradius r immer Kugelschalen, aber in der gekrümmten RZ eher Rotationsellipsoide. Die Radien des äußeren $r_{H,o}$ (+ Vorzeichen) und inneren $r_{H,i}$ Horizontes entspringen folgender Gll (für pur- Kerr ist $Q = 0$):

$$r_{H,o,i} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \quad (33)$$

Konversion in SI- Einheiten: $\cdot R_G$. Wichtig ist, dass an den Horizont- Flächen $\Delta = 0$ wird und somit eine Koordinaten- Singulartität in Boyer- Lindquist- Koordinaten vorliegt, nicht unbedingt in anderen. Und zwischen den Horizonten ist $\Delta < 0$, sodass Zeit und Raum die Rollen tauschen: die t- Koordinate wird raumartig und die r- Koordinate wird zeitartig: eine Bewegung entlang r erscheint nicht als Bewegung im Raum, sondern in der Zeit!¹³ Die Bewegung in Richtung Singularität wird unvermeidbar.

Weiterhin zeigt die Kerr- Metrik, dass die RZ im Loch nur bis an den inneren Cauchy- Horizont stabil ist. Dieser stellt eine Massen- Infaltions- Singularität dar: einfallende Massen erleben einen unendlichen Anstieg ihrer Energiedichte, was die RZ extrem verzerrt und die ART zusammenbrechen lässt. Ein ins Loch einfallender Beobachter würde innen die gesamte Zukunft des äußeren Universums vorbeiziehen sehen, bevor er in der unendlichen Massendichte des Cauchy- Horizontes stecken bleibt.¹⁴ Möglw. spielen Quanteneffekte in dieser inneren Region eine wichtige Rolle, aber es gibt noch keine vollständige Theorie der Quantengravitation...

¹³An beiden Horizonten ist auch der Killing- Vektor ξ^μ , der die Zeittranslationssymmetrie beschreibt, gleich Null: $\xi^\mu \xi_\mu = 0$.

¹⁴Vgl. [8] S. F-5

Kreisfrequenzen $f_{H,o}$ und $f_{H,i}$ der beiden Horizonte
 Von außen gesehen (coordinate time, superflat) würde ein einfallendes Partikel oder Photon gen Horizont immer langsamer werden und schließlich darin stecken bleiben, ggf. dessen Rotation zwar mitmachen, aber den Horizont nie überqueren können. Es wäre am Horizont vollkommen im Framedragg gefangen. Aus der lokalen Sicht des Partikels (proper time) geschähe die Annäherung und sogar das Überschreiten des Horizontes bis zur Singularität jedoch in endlicher Zeit! Für Photonen geschähe dies sogar instantan, „im Nu“!

Dennoch lassen sich für die beiden Horizonte Rotationsformeln in coordinate time (superflat) angeben:

$$\omega_{H,o,i} = \frac{a}{r_{H,o,i}^2 + a^2} \quad (34)$$

Periodendauer und Kreisfrequenz wieder nach: $T = 2\pi/\omega$ und $f = 1/T = \omega/2\pi$, Konversion in SI- Einheiten durch Teilen durch t_G . Betrachten wir so den Cauchy- Horizont, so rotiert dieser theoretisch schon bei $a = 0.8$ mit c und bei $a \rightarrow 0$ mit unendlich höherer Lichtgeschwindigkeit!

2.4.4 Konstante Radien: äußere und innere Ergosphäre $R_{E,o}$ und $R_{E,i}$

Die Ergosphäre ist eine dynamische Grenze und definiert als die Raumschale, an der endlich alle einfallende Materie durch Frame- Dragging in Rotationsrichtung mitgerissen wird, da hier die retrograd emittierten Photonen genau Stille stehen, deswegen heißt sie auch „stationary limit“ (siehe auch: Penrose process)! Prograde Photonen emittieren dagegen mit genau doppelter Framedragg- Geschwindigkeit ($\Omega_{min} = 0, \Omega_{max} = 2\omega$).

Beim Schwarzschild- Loch koinzidiert die Ergosphäre mit dem äußeren Ereignis- Horizont bei $r = 2$ und verschwindet. Beginnt die Rotation, bleibt sie äquatorial immer konstant bei $r = 2$ stehen, während sie sich an den Polen kürbisartig einstülpt und am zurück weichenden äußeren Ereignishorizont haften bleibt und mit diesem gen $r = 1$ wandert. Ganz analog die innere Ergosphäre: sie haftet bei Rotation äquatorial immer bei $r = 0$ und verbleibt im inneren Horizont (siehe Bild 4 a) S. 15. Die Radien der Flächen der äußeren und inneren Ergosphäre entspringen folgender Gleichung (erster Ausdruck in geometrisierten Einheiten, zweiter Ausdruck in SI- Einheiten):

$$r_{E,o,i} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (35)$$

$$= 2 \left(R_G \pm \sqrt{R_G^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (36)$$

Diese Gleichungen bilden die gesamte räumliche Gestalt der beiden Ergosphären ab und sind für 3D- Darstellungen nötig. Da in der Äquatorialebene jedoch immer $\cos \theta = 0$ ist, liegt hier die äußere Ergosphäre stets bei $r_{E,o} = 2$ und die innere bei $r_{E,i} = 0$. Ergosphären sind dynamische Markanten, sie drehen sich aber nicht und sind damit nicht vertonbar.

2.5 Kreisfrequenz der Ringsingularität?

Früher stellte man sich die Ringsingularität (RS) bei $r = 0, \theta = \pi/2$ als Quelle der Gravitation vor, da in ihr ein „Massenstrom“ rotiere. Doch kommen die Physiker immer in Erklärungs- Schwierigkeiten wenn sie versuchen das mathematische SL physikalisch interpretieren zu wollen. Aber Schwarzschild- und Kerr- Lösungen sind als „Vakuumlösungen“ der Einsteinschen Feldgleichungen definiert, sie gelten nur im Vakuum oder einfach gesagt: eigentlich nur im mathematischen Ideal. Tatsächlich ist ein Ring ohne Breite ein Kreis und ohne Ausdehnung ein Punkt...

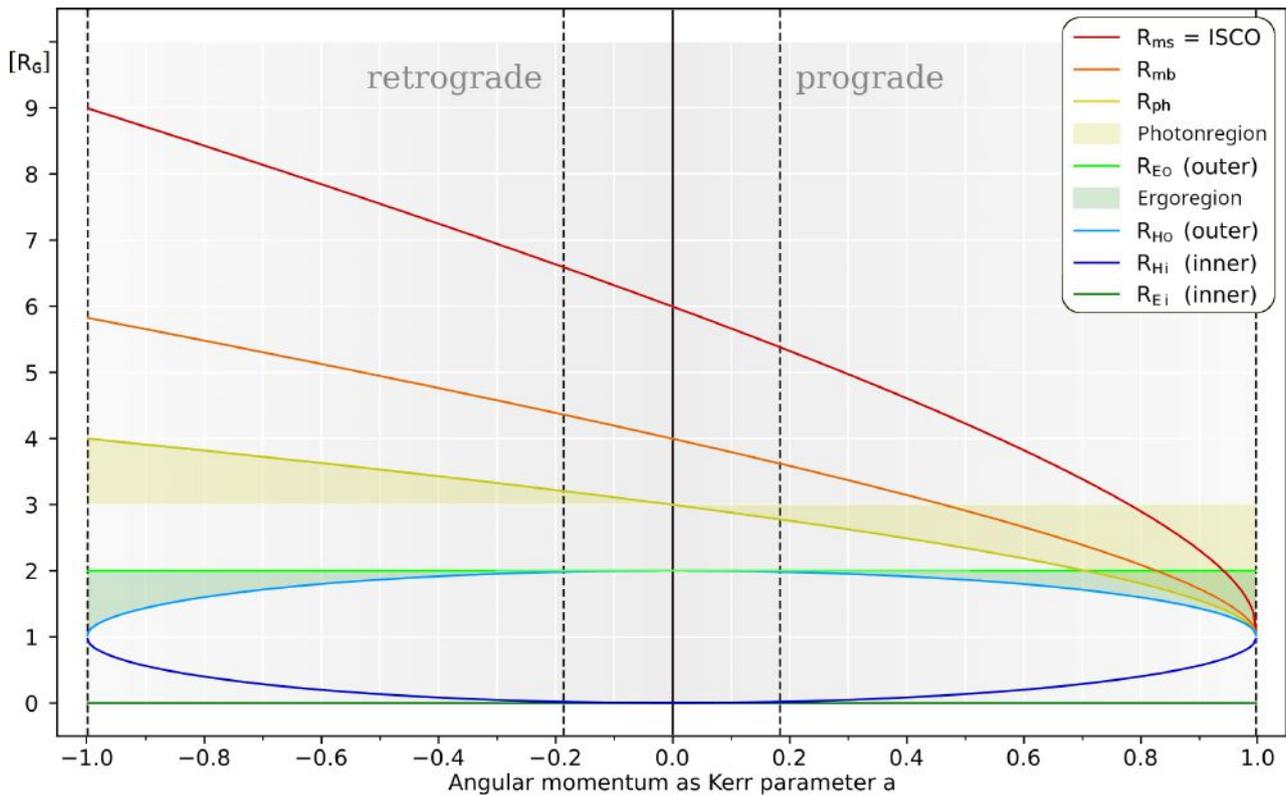
Dennoch ist in der klass. Mechanik der Kreis- Drehimpuls $J = mrv = mr^2\omega$, was für SLer bei $v = c$ in geom. Einheiten $J = aM$ bedeutet. So entspräche der Drehimpuls J eines SLes rein rechnerisch immer der Rotation einer Masse M im Abstand r mit der Geschwindigkeit c . Daraus können wir rein formal eine Winkelgeschwindigkeit und Umlaufperiode der RS ableiten (in SI- bzw. geom. Einheiten):

$$\omega_{Ring} = \frac{1}{a} \hat{=} \frac{GM}{ac} \quad (37)$$

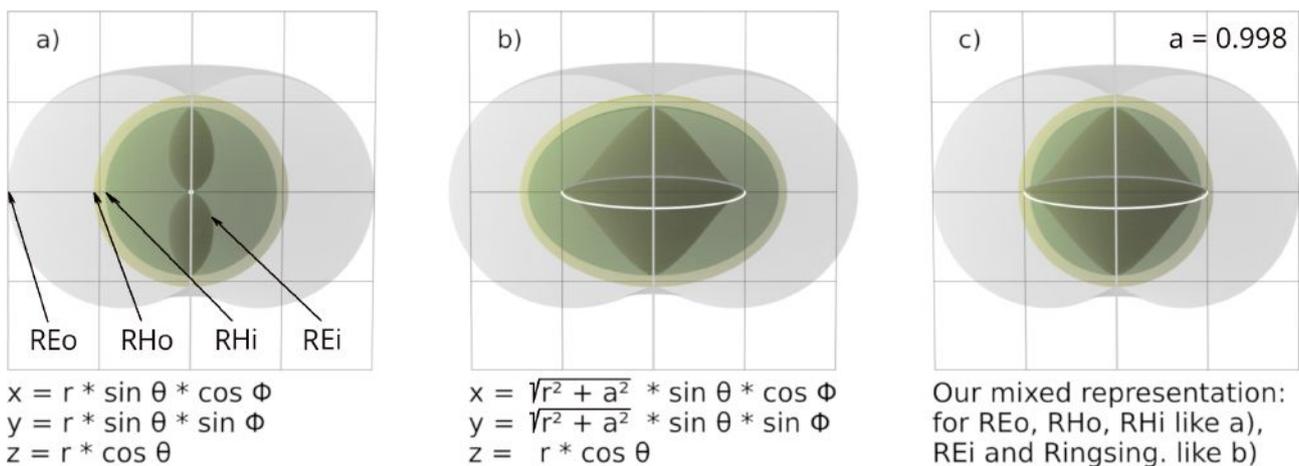
$$T_{Ring} = 2\pi a = 2\pi \frac{ac}{GM} \quad (38)$$

Und wie immer: $f = 1/T = \omega/2\pi$. Da die RS im Punkt $r = 0$ verborgen ist, kann man so harmonikal Ton und Farbe berechnen und den zentralen Punkt aussagekräftig leuchten lassen, was reizvoll sein mag. Tatsächlich ist die RS jedoch ein math. Grenzwert, hier kollabieren die Gesetze der ART und die Dichte und Krümmung der RZ wird unendlich. Deswegen kann die RS weder Quelle der Gravitation, noch der Rotation sein, die beide auf die gesamte Metrik verteilt sind.

Das Prinzip der Kosmischen Zensur Das von dem brit. Mathematiker ROGER PENROSE (geb. 1931) eingeführte Prinzip der kosmische Zensur (engl. cosmic censorship) besagt, dass es keine „nackten“, also „sichtbaren“ Singularitäten mit $a > 1$ geben kann. Die Singularität muss also immer hinter dem Ereignishorizont verborgen sein. Nun, bei $a = 1$ liegt die RS genau auf dem Ereignishorizont. Genau genommen haben wir dann also eine „halbnackte“ Singularität vorliegen, die für unsere theoretischen Betrachtungen besonders interessant ist.



4: Die Grafik zeigt, wie sich mit zunehmender Rotation außen die markanten Kreisbahnradien in retro- und prograde aufsplitten und divergieren (Lies von der Mitte $a=0$ symmetrisch zu den beiden Seiten $a \rightarrow \mp 1$: Für Partikel läuft der Radius der marginalen Stabilität R_{ms} von 6 auf 9 bzw. 1, der Radius der marginalen Bindung R_{mb} läuft von 4 auf 5,828... bzw. 1, und die begrenzenden Photonenkreisradien laufen von 3 auf 4 bzw. 1, wobei sich zwischen diesen Grenzen die Rotationsebene der Photonen dreht und die breite Photonensphäre bildet - hier gelb schattiert. Darin durchqueren die Photonen immer bei $r=3$ senkrecht den Äquator.). Gleichzeitig konvergieren innen die Abstände der Ereignishorizonte und koinzidieren bei 1: der äußere läuft von 2 nach 1 und der innere von 0 nach 1. Dagegen bleiben die Abstände der Ergosphären konstant außen 2 und innen 0. Alles in der äquatorialen Ebene.



5: Verschiedene Möglichkeiten der Transformation von Boyer- Lindquist in kartesische Koordinaten: a) Die einfache Transformation zeigt die realen Verhältnisse des Koordinatenradius r : Sowohl die innere Ergosphäre als auch der Radius der Ringsingularität bleiben bei $r=0$ im Mittelpunkt unsichtbar. Die äußere Ergosphäre ist richtig bei $r=2$ zu sehen, bei hohem a kommen sich äußerer (gelb) und innerer (grün) Ereignishorizont schon sehr nahe. b) Alle Radien wurden durch die abgebildeten Formeln transformiert, was alle Proportionen vergrößert, jedoch eine (unrealistische) Vorstellung von der inneren Ringsingularität und die sie umschließende innere Ergosphäre (grau) vermittelt. c) Die gemischte Transformation wie wir sie in den Abbildungen S. 21f und 29 in der Draufsicht verwenden. Äußere Ergosphäre und Horizonte sind korrekt, innere Ergosphäre und Ringsingularität sind artifiziell aufgeweitet.

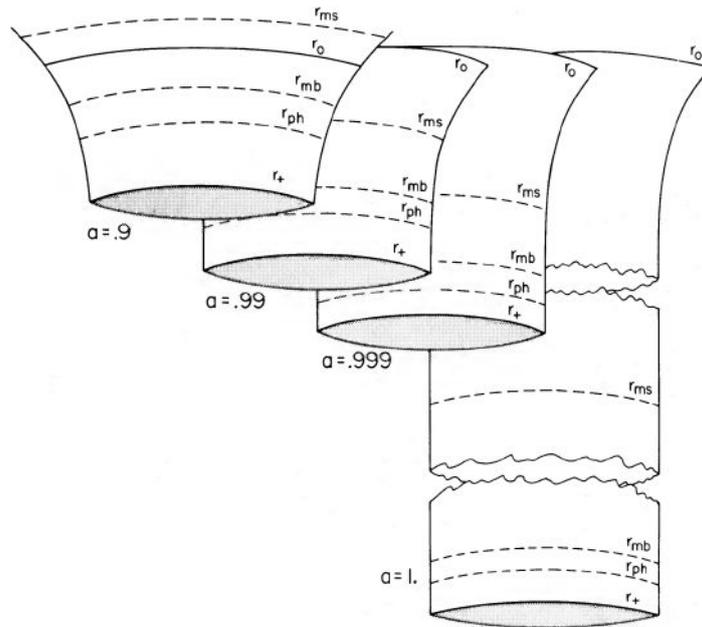


FIG. 2.—Embedding diagrams of the “plane” $\theta = \pi/2$, $t = \text{constant}$, for rotating black holes with near-maximum angular momentum. Here a denotes the hole’s angular momentum in units of M . The Boyer-Lindquist radial coordinate r determines only the circumference of the “tube.” When $a \rightarrow M$, the orbits at r_{ms} , r_{mb} , and r_{ph} all have the same circumference and coordinate radius, although—as the embedding diagram shows clearly—they are in fact distinct.

6: Das Bild zeigt, wie sich die Physiker den Ereignishorizont vorstellen, auf dem innerhalb der RZ (proper time) verschiedene Geschwindigkeiten für Partikel und für Licht vorliegen, während diese Bewegungen von außen (coordinate time) alle im Framedrag feststecken und mit dem Horizont rotieren: Nämlich indem der äquatoriale Horizontkreis um eine Dimension erweitert und zum Zylinder ausgefahren wird, auf dem die verschiedenen Bahnen distinkt nebeneinander koexistieren. Quelle: [1] S. 353

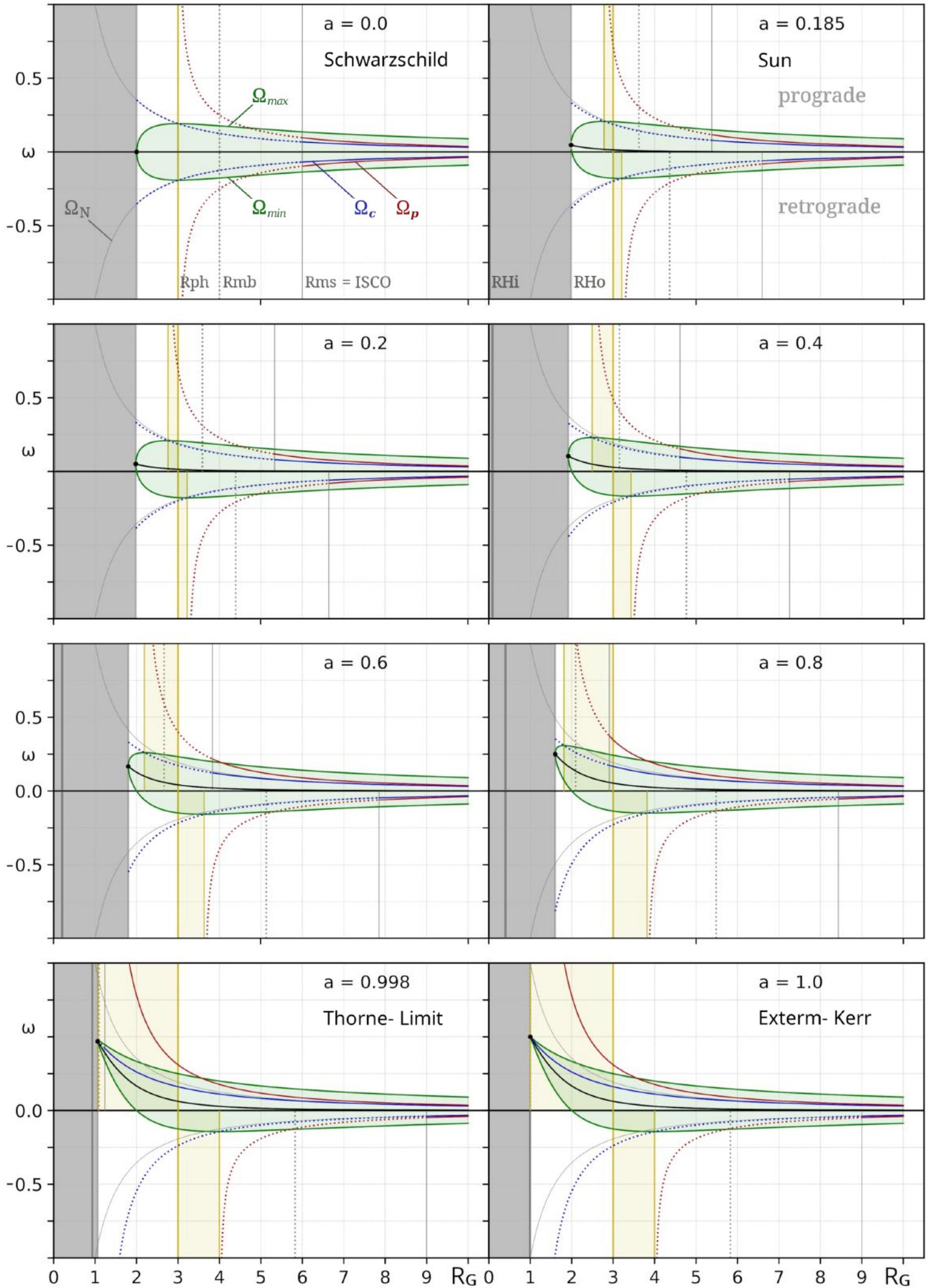
7: Die folgenden Grafiken zeigen auf S. 17 die Winkelgeschwindigkeit ω von Gl. 20 der rotierenden RZ bzw. des ZAMO in ihr in der dicken schwarzen Linie mit Endpunkt am Horizont. Gegenüber auf S. 18 ist zur Ergänzung der Vorstellung dasselbe Szenario mit den reziproken Umlaufperioden $T = 2\pi/\omega$ gezeigt. Die Berechnungen wurden für acht verschiedene Kerr- Parameter: $a = [0, 0.185, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.998, 1.0]$ durchgeführt, sodass diese Abfolge eine Vorstellung vom Verlauf der Graphen bei sukzessive zunehmender Rotation vermitteln möchte.

Nun kann man einen transversalen Lichtstrahl vom ZAMO einmal genau in Bewegungsrichtung und einmal genau entgegengesetzt dieser emittieren und erhält dann die nach Gl. 22 berechneten grünen Grafen als Grenzlinsen der maximal und minimal möglichen Winkelgeschwindigkeiten Ω_{max} und Ω_{min} innerhalb des Framedrag. Zusätzlich sind die Grafen Ω_N der Newtonschen Approximation grau eingezeichnet, die immer gleich bleibt und nur bei $a = 0$ deckungsgleich ist mit der blauen Koordinaten- Winkelgeschwindigkeit für Partikel Ω_c , wovon wir stets die eigentliche Proper- Winkelgeschwindigkeit Ω_p in rot unterscheiden. Mit zunehmenden Drehimpuls a rumpft sich das gesamte Gebilde nach oben in positive Rotation, wobei man bis $a = 0.8$ sieht, dass prograd emittierte Photonen schneller sein können als die Rotation des Horizontes. Aber bei größerem a wird die Rotation des Horizontes schneller, sodass alle retro- und prograden Partikel und Photonen schließlich am Horizont genau mit diesem mitrotieren. Die maximale Rotation des Horizontes bei Extrem- Kerr erfolgt mit $\omega = 0.5$ was einer Koordinaten- Bahngeschwindigkeit von $c/2$ entspricht. Berechnet man v dagegen mit dem umfangbezogenen Eigenradius, ist $v = c!$

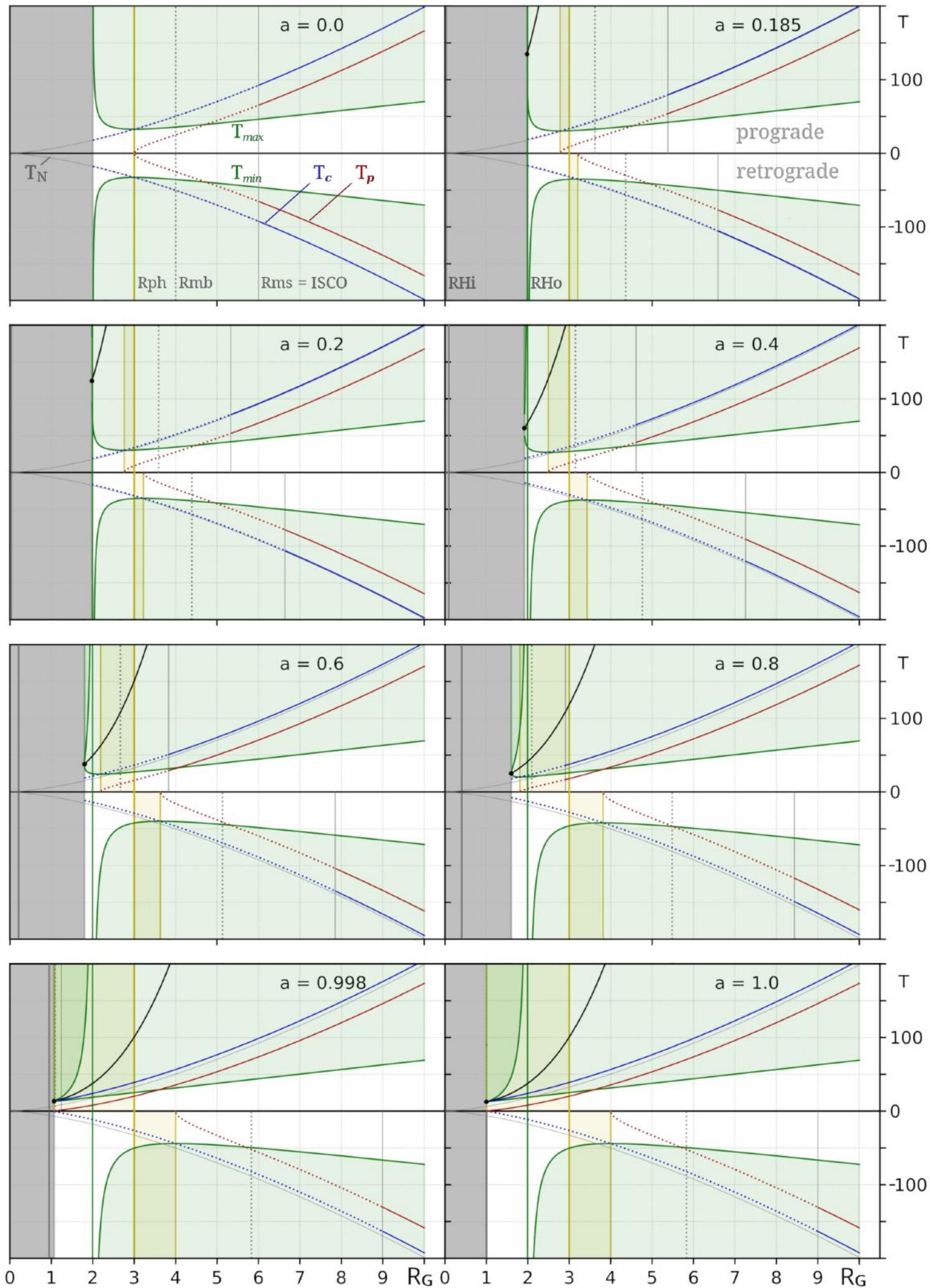
Betrachten wir jetzt die senkrechten Linien von außen nach innen, rechts nach links: Zuerst kommt der Radius der marginalen Stabilität R_{ms} bis zu dem stabile Kreisbahnen möglich sind. Innerhalb desselben (gepunktete Linien) werden die Bahnen instabil bis zum Radius der marginalen Bindung R_{mb} , innerhalb dessen die Bahnen gänzlich unvorhersagbar werden. Die gepunkteten Grafen wurden dennoch weiter durchgezogen, um ihren theoretischen Verkauf zu zeigen: Interessant dabei ist, dass die hypothetischen Bahnen in coordinate time (blau) von der Newtonschen Approximation (grau) abweichen, während die Bahnen gemessen in proper time (rot) ihre Grenzwerte an den retro- und prograden äquatorialen Photonen- Kreisbahnen finden, was logisch ist. Die Photonenregion (gelb schattiert) hat ihre äußere und innere Grenze an den retro- und prograden äquatorialen Photonenkreisbahnen genau da, wo die theoretische blaue Ω_c die grünen Ω_{max} bzw. Ω_{min} durchstößt, während ihr mittlerer Teil immer bei $r = 3$ den senkrechten Durchstoß der Photonenbahnen durch den Äquator kennzeichnet.

Schließlich sehen wir bei zunehmender Rotation den äußeren Horizont (Grenze der Graufäche) hinein wandern und den inneren Horizont (grauer Strich innerhalb der Graufäche) hinaus, bis sie bei Extrem- Kerr $a = 1$ miteinander bei $r = 1$ koinzidieren.

Angular Velocities in the equatorial plane of a Kerr- black hole



Circular Periods in the equatorial plane of a Kerr- black hole



2.6 Harmonikale Grafiken und Stimmtabellen zu den Schwarzen Löchern von der Masse der Sonne und Sgr A*

Die obigen Grafiken sind prinzipieller Art, die folgenden blauen Grafiken sind auf die Masse unserer Sonne (GM_{\odot}) und derjenigen des Schwarzen Loches im Zentrum unserer Milchstrasse berechnet. Wenn jemand diese Objekte programmieren möchte, so können die hiesigen Farben und Daten zur Überprüfung der Ergebnisse dienen.

2.6.1 Grafiken

Die folgenden harmonikalen Grafiken zeigen ein Kerr-Black-Hole von Sonnenmasse in der Draufsicht über dem Nordpol, sodass die Drehung gegen den Uhrzeigersinn der Konvention entsprechend als rechtläufige bzw. prograde Bewegung definiert ist. Der Drehimpuls wird als Kerr-Parameter a jeweils in der linken oberen Ecke angezeigt, er dient uns zur Unterscheidung der Plots. Die Plots sollen die Veränderung der Proportionen und Farben bei zunehmendem a verdeutlichen, sodass auch diese für wachsende $a = [0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]$ dargestellt sind, wobei der tatsächliche Drehimpuls der Sonne mit $a \approx 0.185$ und das Thorne-Limit bei $a = 0.998$ von besonderem Interesse sind und in die Reihe eingeschoben wurden.

Von aussen nach innen kommend sehen wir rechts zuerst **5 verschiedene Spektralbänder** übereinander, die alle Ausschnitte äquatorialer kreisrunder Farbbahnen sind und in der Abfolge den 12 Tönen der gleichstufigen Tonleiter entsprechen, die nach innen hin aufsteigt (Oktavmandala). Der tiefste Ton dieser im Spektrum ist ein Fis im dunkelrot, das jeweils mit einem Punkt versehen ist, sodass man die Oktavschritte besser erkennt. Dazu ist für $a = 1$ ein Kreis mit der Oktavzahl -38 zu sehen, was für die anderen Sonnen-Bilder ebenso gilt, um den Oktavabstand zum sichtbaren Spektrum anzuzeigen; wer bis an das Loch heran zählt wird die besagten -34 für die Newtonsche Approximation finden, dagegen erhalten wir bei richtiger Zählung -35 für Pro-Extreme-Kerr. **Wir erhalten also mit Pro-Extreme-Kerr den gleichen Sonnenton wie nach der Newtonschen Approximation, nur eine Oktave tiefer schon im höchsten Hörbereich!** Analoges gilt für Sgr A* mit der Oktavzahl -60, was $60-38=22$, also $2^{22} \approx 4.2 \text{ Mio}$ mal schwerer ist als die Sonne.

Die Oktavmandalas sind fünffach: In der Mitte ist die Newtonsche Approximation gezeigt (3. Keplersches Gesetz, links „New“), die zwar wissenschaftlich unzureichend ist, aber an der man ganz schön die richtigen Bahnen orientieren kann. Sie berücksichtigt weder Raumzeitkrümmung noch Rotation und reicht immer bis auf einen

Gravitationsradius R_G heran. Darunter schließt das Retrograde und darüber das Prograde Oktavmandala der Kerr-Metrik (*coordinate time*, T_{RC} & T_{PC}), also so wie es aus der flachen Raumzeit in unendlicher Ferne beobachtbar wäre (superflat). Davon werden die lokalen Umlaufperioden in Eigenzeit unterschieden die wiederum Retrograd ganz unten und Prograd ganz oben abgebildet sind (*proper time*, T_{Rp} & T_{Pp}). So unterscheiden wir in der Äquatorebene ganze 5 verschiedene Umlaufperioden!

Für Partikel-Kreisbahnen begegnen wir von aussen kommend zuerst dem **Grenz-Radius der marginalen Stabilität** R_{ms} , der sich bei beginnender Rotation in einen Retrograden (unterhalb) und einen Prograden (oberhalb von „New“) aufspaltet. Diese divergieren dann mit $a \rightarrow 1$, wobei sie zur besseren Wahrnehmung auf je einen Halbkreis ausgezogen sind. Diese marginal stabilen Bahnen sind die letzten Grenz-Bahnen auf denen stabile Umkreisungen (im Potentialtrog) noch möglich sind. Weiter innen werden die Bahnen instabil (auf Potentialberg) und sind deswegen auch nicht mehr so dick geplottet. Aber auch diese instabilen Bahnen haben einen inneren **Grenz-Radius der marginalen Bindung** R_{mb} bis zu dem die instabilen Kreisbahnen theoretisch noch möglich sind. Noch weiter innen ist keine Bahn für Partikel mehr vorhersagbar, da diese von leichtesten Einflüssen stark abgelenkt werden und dann wohl recht chaotisch verlaufen können. Doch erreichten die theoretischen Partikelkreisbahnen die Lichtgeschwindigkeit c , so existieren auf diesen Abständen die Retro- bzw. Prograden **Grenz-Radien der marginalen Photonenkreisbahnen** R_{phR} , R_{phP} die ebenfalls instabil sind, auf denen aber theoretisch (d.h. ohne jegliche Irritation) Photonen unendlich lange auf äquatorialen Kreisbahn kursieren könnten. Bei dieser Einteilung wird der Begriff „marginal“ in drei verschiedenen Hinsichten gebraucht: R_{ms} ist eine dynamische Innengrenze der Stabilität, R_{mb} ist eine energetische Außengrenze der Bindung und R_{ph} beschreibt die Innen- und Außengrenze der Photonenregion um $r = 3$ (gelb mattiert).

Noch weiter innen kommt die **äußere Ergosphäre**, immer bei $r = 2$ (unbewegt: grau), der **äußere Ereignishorizont** (wegen Rotation farbig), der **innere Ereignishorizont** (wegen Rotation farbig) und die **innere Ergosphäre** (unbewegt: grau) bei $r = 0$. Die Darstellung ist die Mischform der im Bild 5 c) dargestellten Möglichkeit, also was den inneren Cauchy-Horizont, die innere Ergosphäre und die Ringsingularität betrifft, nicht Boyer-Lindquist-realistisch. Die äußere Ergosphäre bei $r = 2$ wird auch „statisches Limit“ genannt, da hier transversal retrograd vom ZAMO emittierte Photonen im Moment ihres Abfluges von superflat gesehen auf der Stelle stehen bleiben würden, da die retrograde Lichtgeschwindigkeit in der RZ hier genau der prograden Framedragg-Rotation

über der RZ entspricht. Da das stat. Limit aber innerhalb der retrograden Photonenbahn liegt, könnten die Photonen hier nicht auf Kreisbahnen kursieren sondern würden von der Emission an hinein spiralisieren.

Dann kommt der **äußere Ereignishorizont** (Koordinatensingularität!), der sich bei zunehmendem Spin von der äußeren Ergosphäre bei konstant $r = 2$ ablöst und bis auf $r = 1$ nach innen wandert. Weiter innen folgen **innerer Ereignishorizont (Cauchy- Horizont)** und **innere Ergosphäre**, die immer die Ringsingularität (RS) bei $r = 0$ „umschließt“. Dies ist eine der markanten Eigentümlichkeiten der Kerr- Metrik, dass die RS rechnerisch einen Ringdurchmesser von genau a hat, gleichzeitig aber auf dem Koordinatenradius r immer Null misst! In älteren Darstellungen sprach man von der RS noch von einem „Materiestrom“, d.h. man nahm an, dass hier im mathematischen Ring die gesamte Masse konzentriert sei. Heute aber versteht man die Masse als Raumzeitkrümmung und sie ist demnach auf die gesamte RZ des Loches verteilt. Die RS ist eine mathematische Singularität, wo 'Dichte', Krümmung und Rotation der RZ unendlich werden. Hier kollabieren die Gesetze der ART, sodass die RS weder rotiert noch die Masse konzentriert.

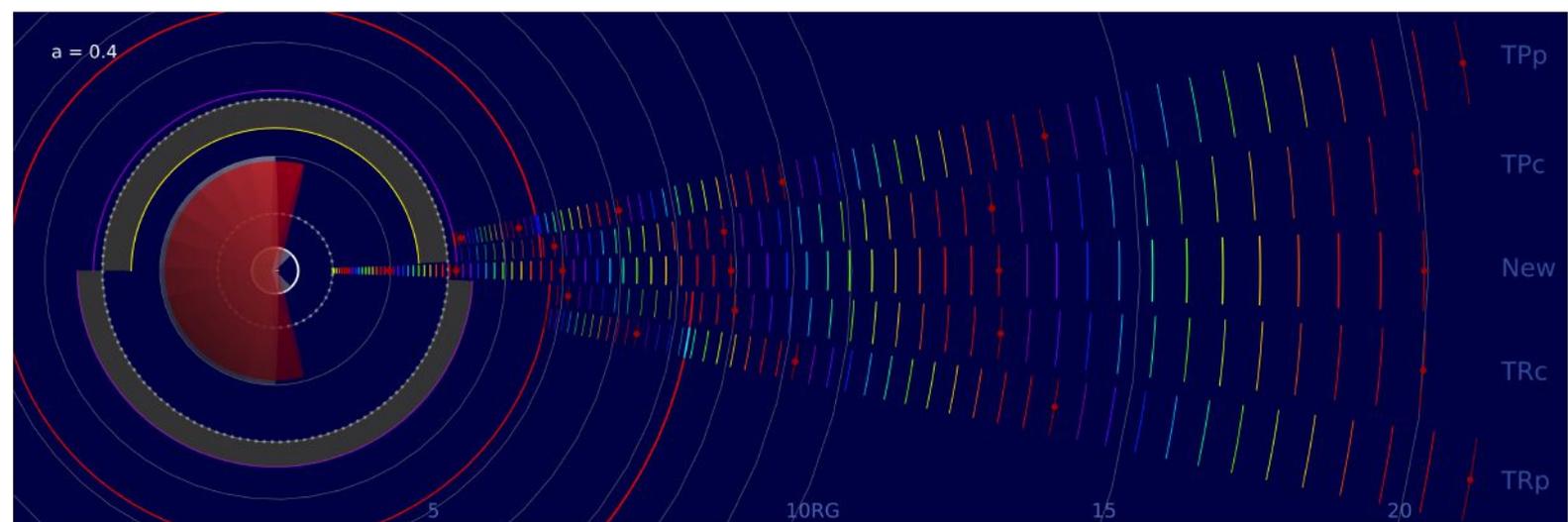
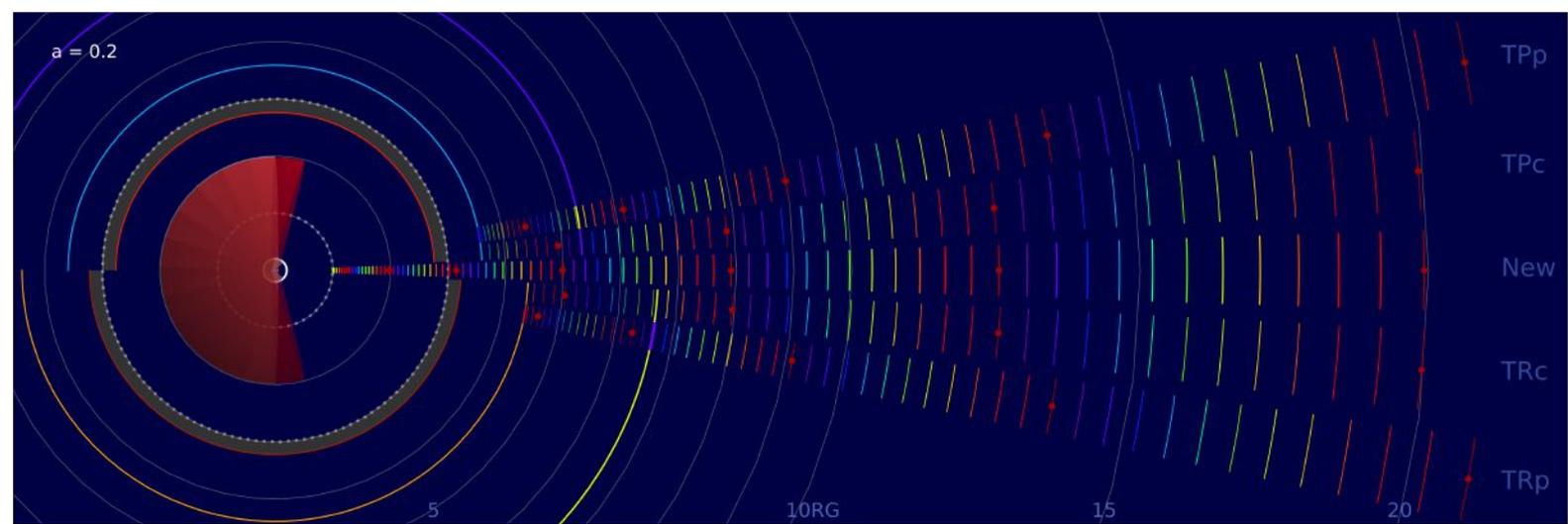
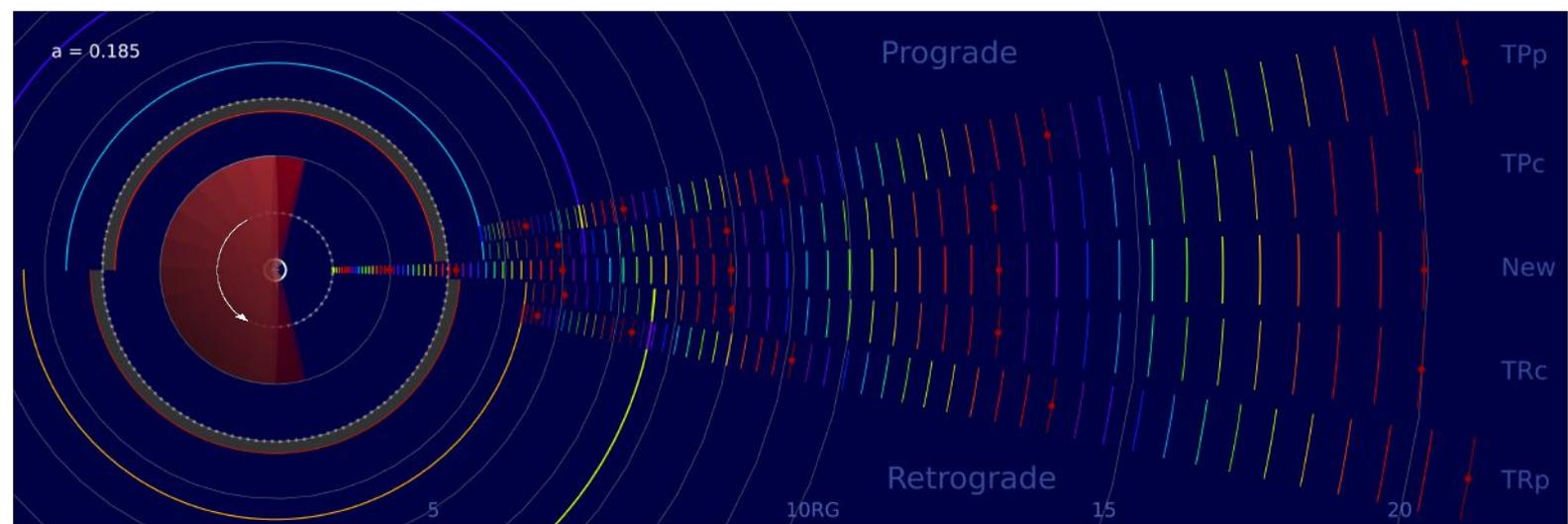
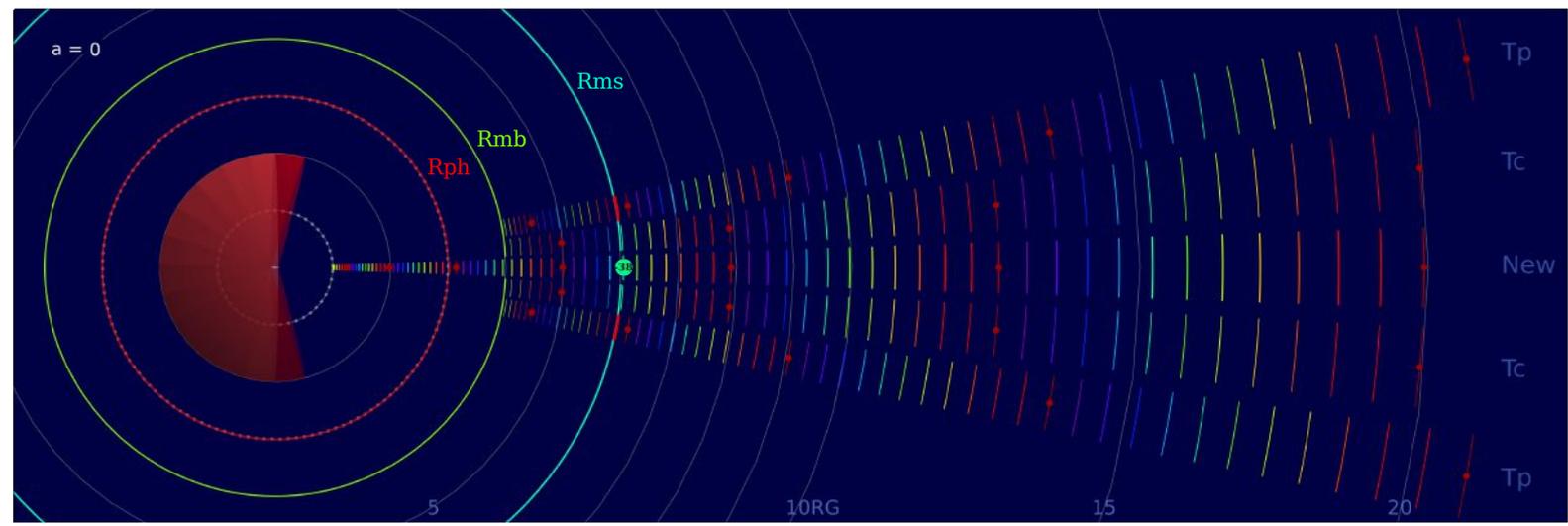
Drehen wir nun den Spin auf und betrachten die Entwicklung in der Abfolge der Bilder: Bei $a=0$ haben wir sphärische Symmetrie und alle Bahnen können in allen Winkeln auf den Kugelschalen erfolgen. Aufgrund der fehlenden Rotation gibt es kein „retro- und prograd“, interessant ist hier aber, dass die möglichen T_c - Bahnen bis an die Grenzradien genau der Newtonschen Approximation entsprechen, weshalb diese zur Orientierung doch gute Dienste leistet. Beginnt die Rotation bei $a=0.185$, weichen die sphärischen Kreisbahnen in die Äquatorebene zurück. Gleichzeitig ziehen sich alle retrograden Orbitale in der Äquatorebene nach aussen zurück, während alle prograden Orbitale näher heran ziehen. Entsprechend verändern sich alle Umlaufperioden und die daraus oktavierten Farben, in denen sie dargestellt sind. Für alle weiteren $a=0.2, \dots, 1.0$ ist diese Entwicklung sukzessive gezeigt. Bei $a=1$ erreichen die retrograden Grenzbahnen schließlich ihre äußerste Lage, während alle prograden Bahnen auf dem Äquator- Kreis bei $r = 1$ koinzidieren. Hier kreisen nun Partikel und Photonen innerhalb der Raumzeit zwar immernoch mit verschiedenen Geschwindigkeiten, sie sind von aussen gesehen aber ganz im Framedragg „eingebacken“ und rotieren alle mit der Rotation des Horizontes und dessen Lineargeschwindigkeit $v = c/2$ mit. Eine gängige Vorstellung von dieser Paradoxie haben wir uns im Bild 6 S. 16 erschlossen.

2.6.2 Stimmtabellen

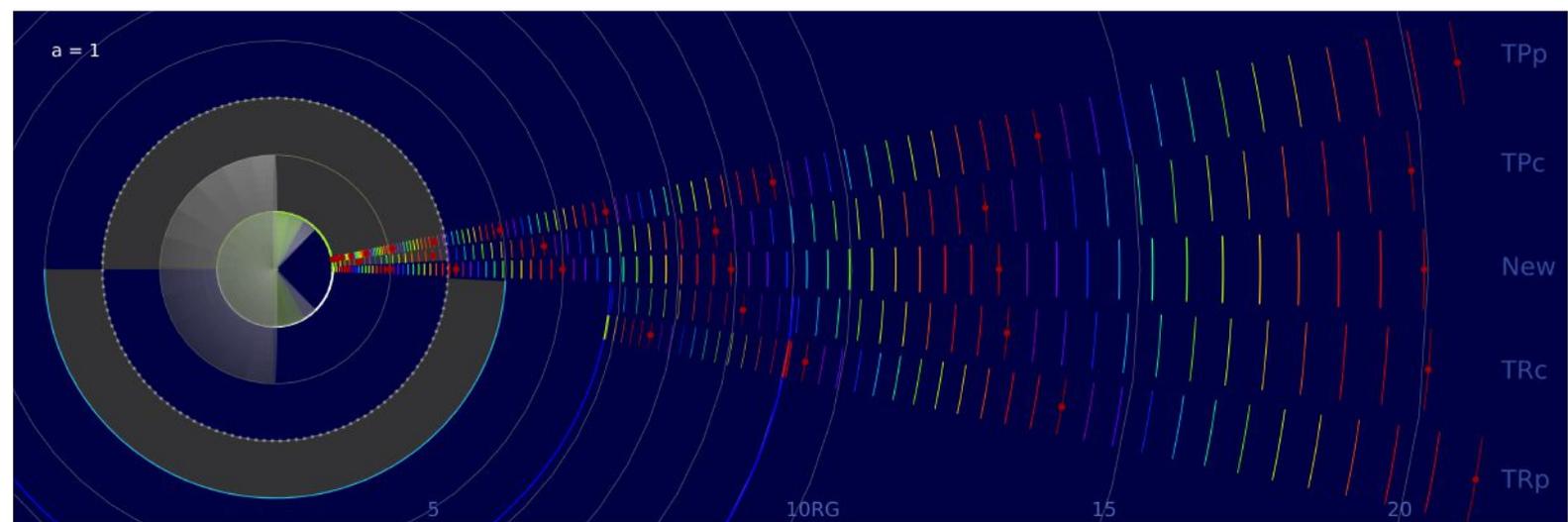
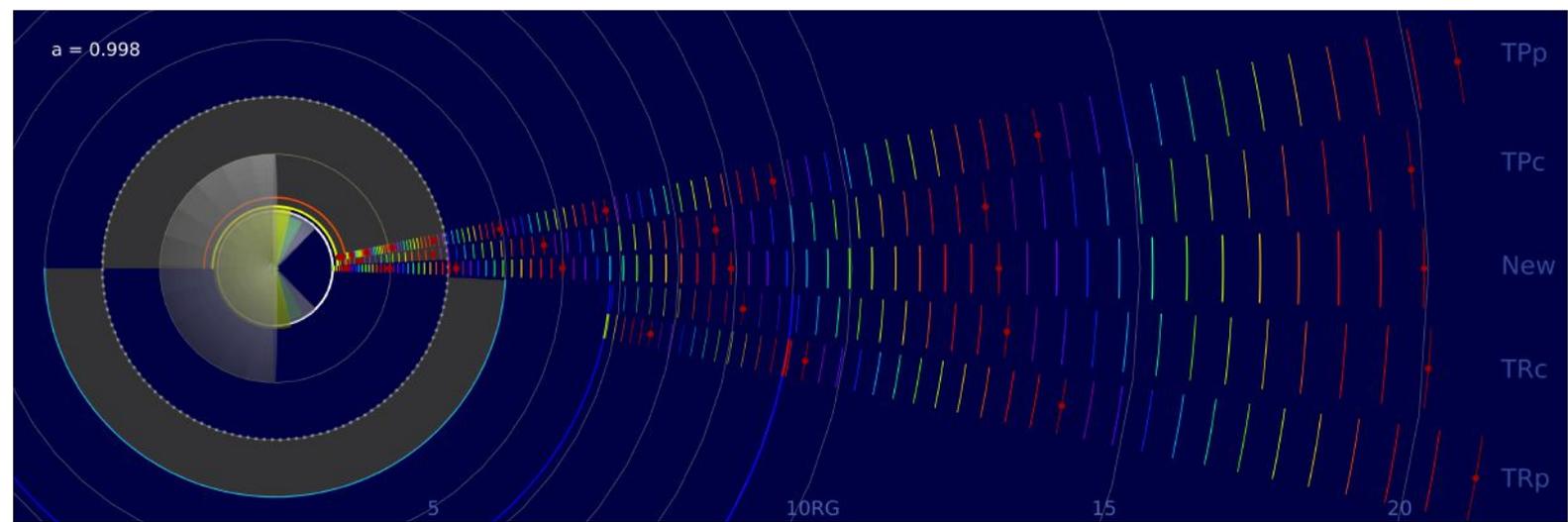
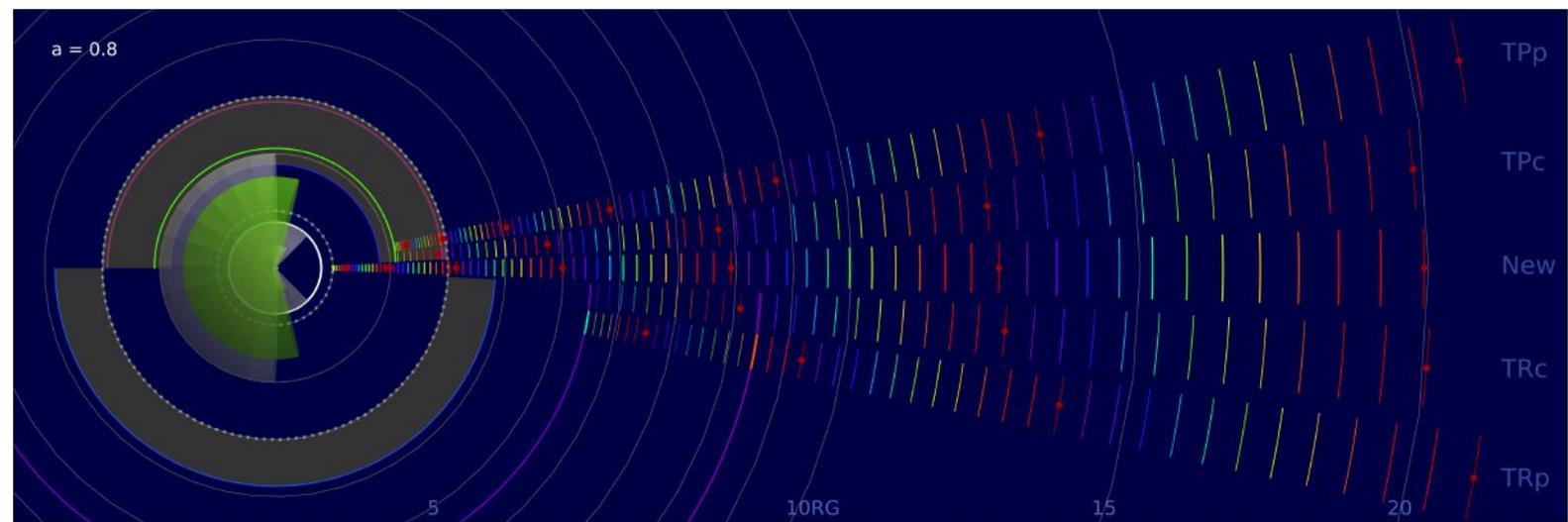
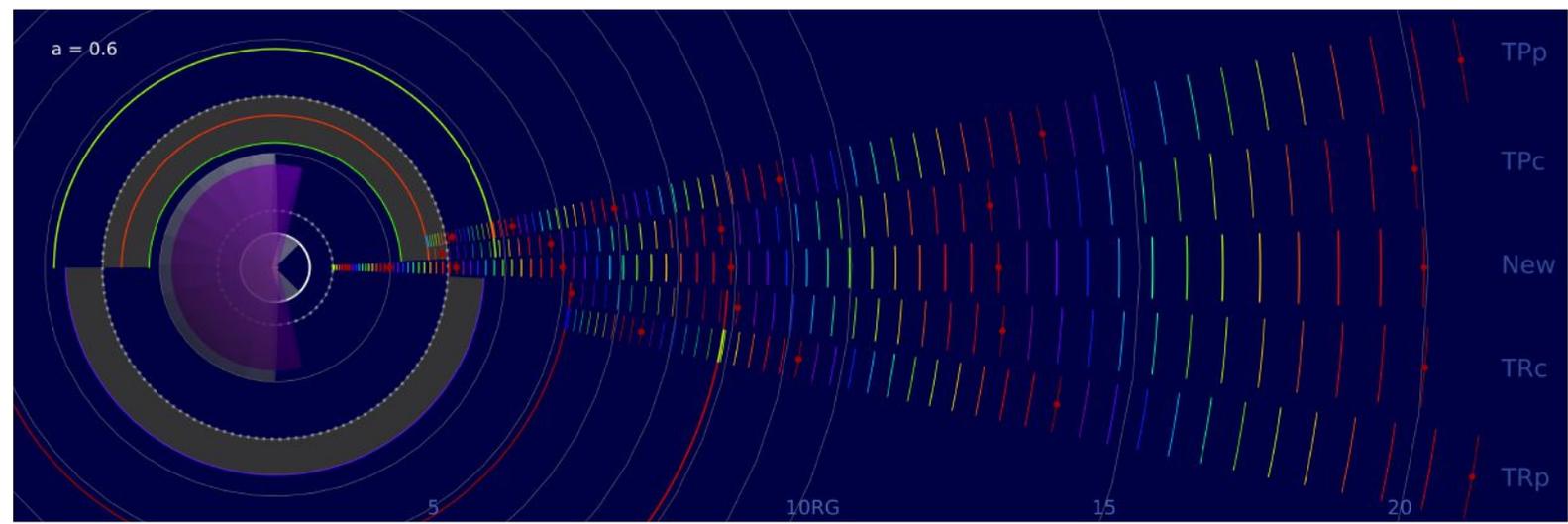
Die Tabellen zeigen die astronomischen Daten und die harmonikalen Stimmdaten sowie die Eigenschaften für oktavanalog schwingende Pendel. Für $a = 0$ (Tabelle 2) gibt es keine Retro- Pro- Unterscheidung aber interessant ist, dass hier der Sonnenton schon 2 bzw. 1 Oktave tiefer erscheint (als $f_{mb,c}$ bzw. $f_{mb,p}$; $n=-37$ bzw. -36) als bei $a = 1$. Auffällig sind auch die Intervalle der Oktave und des Tritonus zwischen den markanten Perioden, sie sind rot mit eingezeichnet. Andere Intervalle sind eher verborgen, wie z.B. $\sqrt{13,5}$ zwischen $f_{ms,c}$ und $f_{mb,p}$.

Im entgegengesetzten Extrem $a = 1$ (Tabelle 5) erscheint **der eigentliche Sonnenton mit 16156,25170508...Hz in der 35. Oktave unter dem Spektrums**. Hier gibt es keine proper- Pro- Frequenzen, da der Horizont eine „lichtartige Oberfläche“ ist, gemacht aus Null- Geodäten, auf denen nur Photonen existieren können, für die ja keine Zeit vergeht. Dazu zeigen sich ganz andere Intervalle z.B. 13 zwischen $f_{ms,Rc}$ und $f_{ms,Pc}$ oder $\sqrt{108}$ zwischen $f_{ms,Rp}$ und $f_{ms,Pc}$ oder 13 zwischen $f_{ms,Rc}$ und $f_{ms,Pc}$ oder auch $7/2$ zwischen $f_{ph,Rc}$ und $f_{ph,Pc}$. Solche Intervalle findet heute die KI leicht bei Eingabe des Dezimalwertes. Da diese Intervalle für alle Schwarzen Löcher mit entsprechendem a so gelten, ist es einer Erwähnung wert.

Kerr- black hole of SUN- mass



Kerr- black hole of SUN- mass



Suntones for a = 0, spherical symmetric, Schwarzschild								
Period Specifications					Colors			
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values	
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	all	coord.	8859.750231056	2198.587379635	-38	496.063	(0, 254, 191)	
	all	proper	8859.750231056	3109.272090342	-37	701.540	(250, 1, 0)	
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	all	coord.	5906.500154038	4039.062926270	-37	540.045	(128, 255, 1)	
	all	proper	5906.500154038	8078.125852541	-36	540.045	(128, 255, 1)	
Photon Orbits (unstable)	all	coord.	4429.875115528	6218.544180683	-36	701.540	(250, 1, 0)	
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	2953.250077	0	-	-	-	
	Pro inn	coord.	0	0	-	-	-	
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1476.625038509	0	-	-	-	

2: For a=0 periods are spherical distributed. No rotation of the **outer**, infinitely fast rotation of the **inner** horizon - so no harmonical data

Suntones for a = 0.185, the total angular momentum of the real Sun								
Period Specifications					Colors			
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values	
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	9733.932551136	1930.263908102	-38	565.021	(208, 255, 1)	
		proper	9733.932551136	2639.823587938	-38	413.148	(123, 0, 229)	
	Pro	coord.	7945.824121538	2550.810586137	-38	427.566	(75, 0, 254)	
		proper	7945.824121538	3767.350367141	-37	578.995	(249, 253, 1)	
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	6441.265974325	3620.166668540	-37	602.535	(255, 180, 1)	
		proper	6441.265974325	6804.722621016	-36	641.107	(254, 30, 1)	
	Pro	coord.	5346.190365891	4567.731664541	-37	477.541	(0, 205, 254)	
		proper	5346.190365891	9885.931826790	-36	441.289	(2, 9, 255)	
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	4734.979204826	5814.620034608	-36	750.273	(161, 1, 0)	
	Pro	coord.	4102.078014303	6710.509964333	-36	650.108	(254, 1, 0)	
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	2927.761344432	1507.463810426	-38	723.492	(214, 1, 0)	
	Pro inn	coord.	25.4887325869	173154.7167851	-32	403.113	(134, 0, 189)	
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1476.625038509	5779.992874742	-36	754.768	(152, 1, 0)	

3: For a=0.185 particle periods recede into the equatorial plane, the Retrograde periods migrate out, the Prograde periods move inwards

a = 0 continued								
Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
c# 137.4117112272	49	138.591315	-14.798	-1212	128.823479	32.205870	0.862465	all
G 97.1647528232	43	97.998859	-14.798	-1212	91.091956	22.772989	1.724931	all
B 126.2207164460	47	118.331922	38.134	3124	123.470825	29.58298	1.022181	all
B 126.2207164460	47	118.331922	38.134	3124	123.470825	29.58298	1.022181	all
G 97.1647528232	43	97.998859	-14.798	-1212	91.091956	22.772989	1.724931	all
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro out
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro inn
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro out & inn

a = 0.185 continued								
Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
B 120.6414942564	47	123.470825	-40.133	-3288	113.101401	28.275350	1.118912	Retro
e 164.9889742461	52	164.813778	1.839	151	154.677163	38.669291	0.598245	
D# 159.4256616336	51	155.563492	42.456	3478	149.461558	37.365389	0.640727	Pro
A# 117.7296989732	46	116.540940	17.570	1439	110.371593	27.592898	1.174944	
A 113.1302083919	45	110.000000	48.577	3979	106.059570	26.514893	1.272425	Retro
G# 106.3237909534	44	103.826174	41.153	3371	99.678554	24.919639	1.440550	
d 142.7416145169	50	146.832384	-48.917	-4007	133.820264	33.455066	0.799260	Pro
d# 154.4676847936	51	155.563492	-12.238	-1003	144.813454	36.203364	0.682518	
F# 90.8534380408	42	92.498606	-31.069	-2545	85.175098	21.293775	1.972906	Retro
G# 104.8517181927	44	103.826174	17.016	1394	98.298486	24.574621	1.481283	Pro
F# 94.2164881516	42	92.498606	31.858	2610	88.327958	22.081989	1.834575	Pro out
e 169.0964031104	52	164.813778	44.411	3638	158.527878	39.631969	0.569535	Pro inn
F# 90.3123886678	42	92.498606	-41.409	-3392	84.667864	21.166966	1.996616	Pro out & inn

Suntones for a = 0.998, physical limit, Thorne- limit							
Period Specifications					Colors		
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	13281.31852569	1243.903848046	-39	438.394	(16, 3, 255)
		proper	13281.31852569	1556.265118486	-38	700.805	(251, 1, 0)
	Pro	coord.	1826.541841333	13612.43677052	-35	640.966	(254, 30, 1)
		proper	1826.541841333	146891.0270250	-32	475.188	(0, 195, 254)
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	8601.359391968	2474.024560037	-38	440.836	(4, 7, 255)
		proper	8601.359391968	3924.424681218	-37	555.821	(181, 255, 1)
	Pro	coord.	1611.651647122	15111.63343693	-35	577.377	(246, 254, 1)
		proper	1611.651647122	661994.9254680	-30	421.761	(104, 0, 253)
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	5903.874556496	4618.271353351	-37	472.315	(0, 183, 254)
	Pro	coord.	1585.761298977	15307.54192314	-35	569.988	(226, 254, 1)
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	1569.968299281	15165.28222608	-35	575.334	(242, 254, 1)
	Pro inn	coord.	1383.281777738	17211.97569993	-35	506.921	(1, 255, 57)
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1476.625038509	16156.21932789	-35	540.046	(128, 255, 1)

4: The Thorne- limit $a=0.998$ sets a physical upper limit for the stability of rotation and so the possible existence of black holes in reality

Suntones for a = 1.0, Extreme- Kerr							
Period Specifications					Colors		
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	13289.62534658	1242.788592699	-39	438.787	(12, 3, 255)
		proper	13289.62534658	1554.636045171	-38	701.540	(250, 1, 0)
	Pro	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)
		proper	1476.625038509	∞	-	-	-
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	8606.401427528	2472.063023101	-38	441.186	(4, 7, 255)
		proper	8606.401427528	3920.164014993	-37	556.425	(182, 255, 1)
	Pro	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)
		proper	1476.625038509	∞	-	-	-
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	5906.500154038	4616.071915738	-37	472.540	(0, 183, 254)
	Pro	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)
	Pro inn	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1476.625038509	16156.25170508	-35	540.045	(128, 255, 1)

5: The Extreme- Kerr $a=1$ is the theoretical limit of maximum rotation: very interesting for theoretical and philosophical considerations

a = 0.998 continued

Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
d# 155.4879810057	51	155.563492	-0.841	-69	145.769982	36.442496	0.673590	Retro
G 97.2665699054	43	97.998859	-12.985	-1064	91.187409	22.796852	1.721322	
G# 106.3471622696	44	103.826174	41.534	3402	99.700465	24.925116	1.439917	
d 143.4482685791	50	146.832384	-40.368	-3307	134.482752	33.620688	0.791405	Pro
d# 154.6265350023	51	155.563492	-10.459	-857	144.962377	36.240594	0.681116	Retro
B 122.6382712880	47	123.470825	-11.713	-960	114.973379	28.743345	1.082772	
A# 118.0596362261	46	116.540940	22.415	1836	110.680909	27.670227	1.168386	Pro
e 161.6198548506	52	164.813778	-33.879	-2775	151.518614	37.879653	0.623447	
d 144.3209797922	50	146.832384	-29.867	-2447	135.300919	33.825230	0.781862	Retro
A# 119.5901712745	46	116.540940	44.714	3663	112.115786	28.028946	1.138671	Pro
A# 118.4787673913	46	116.540940	28.550	2339	111.073844	27.768461	1.160134	Pro out
c 134.4685601557	48	130.812783	47.718	3909	126.064275	31.516069	0.900633	Pro inn
B 126.2204634991	47	123.470825	38.131	3124	118.331685	29.582921	1.022185	Pro out & inn

a = 1.0 continued

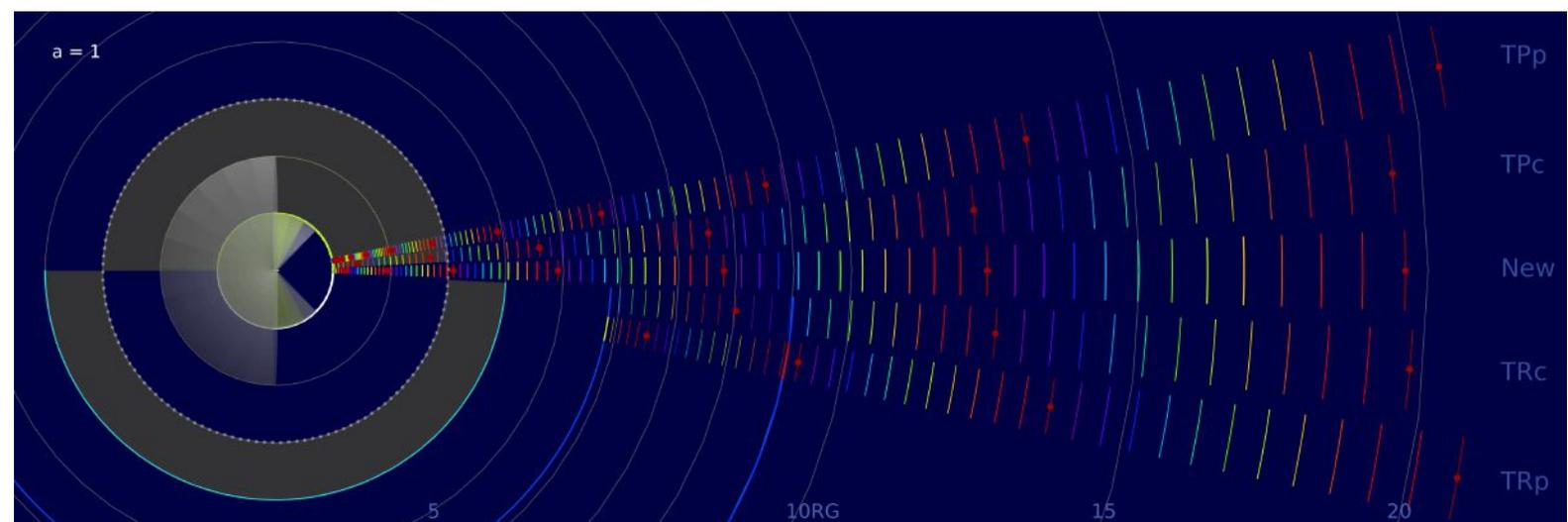
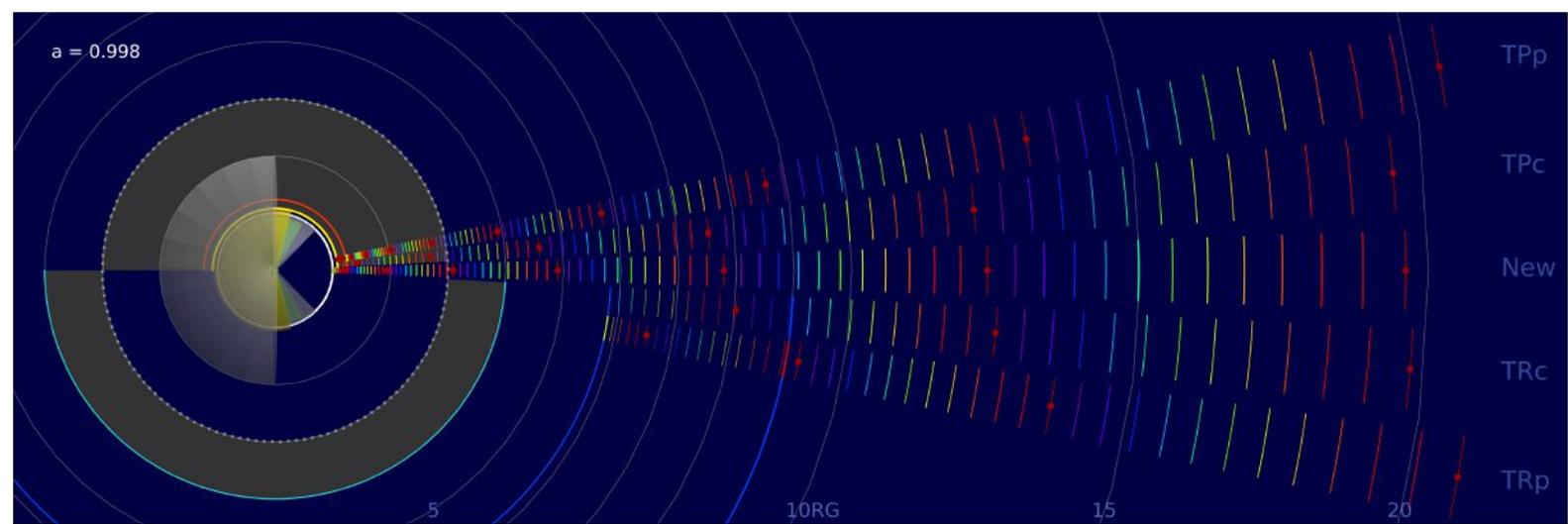
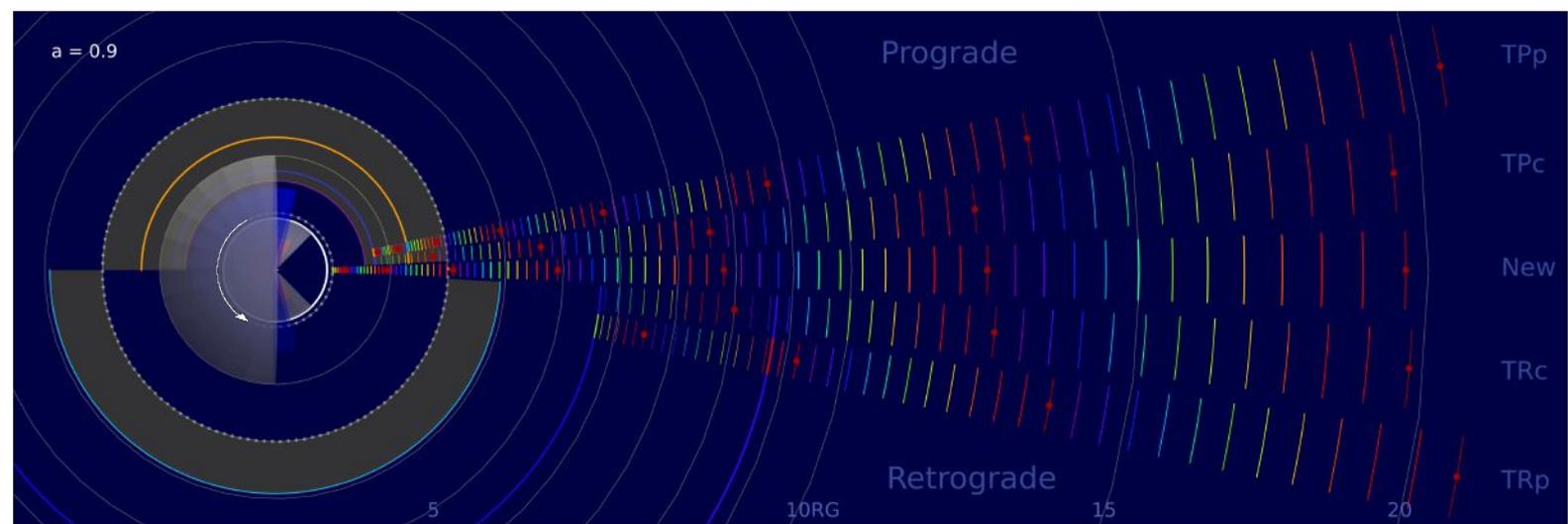
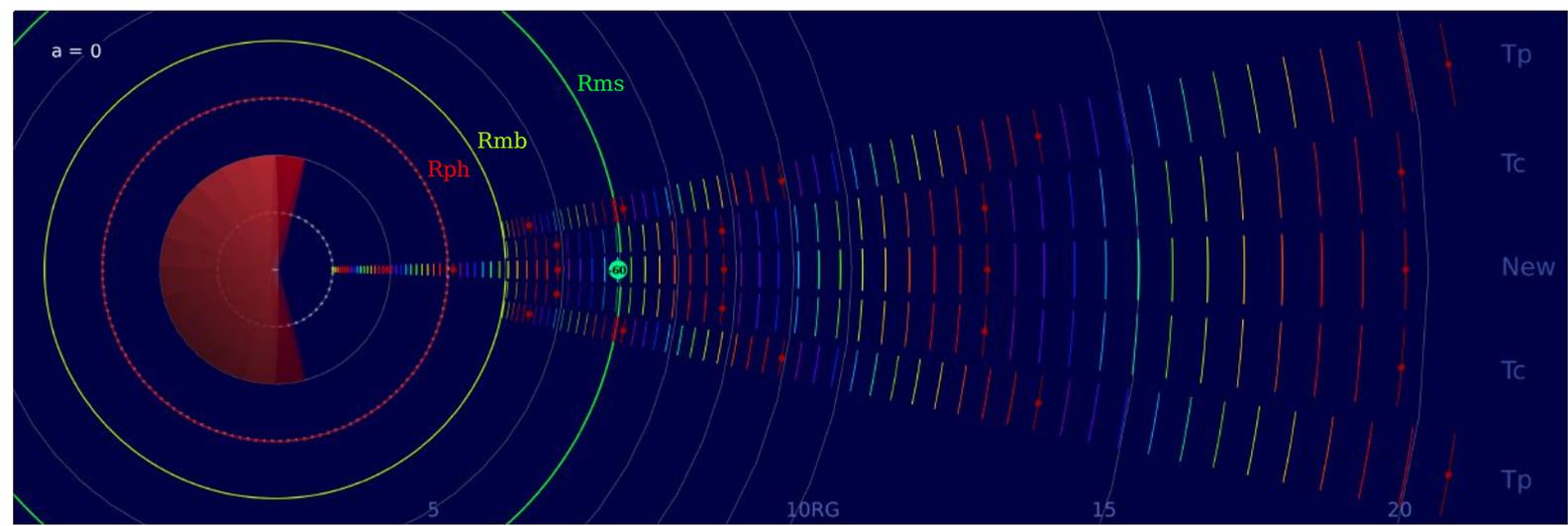
Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
d# 155.3485740873	51	155.563492	-2.393	-196	145.639288	36.409822	0.674799	Retro
G 97.1647528232	43	97.998859	-14.798	-1212	91.091956	22.772989	1.724931	
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.58298	1.022181	
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro
d# 154.5039389438	51	155.563492	11.832	-969	144.847443	36.211861	0.682197	Retro
B 122.5051254685	47	123.470825	-13.594	-1114	114.848555	28.712139	1.085127	
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.582980	1.022181	Pro
-	-	-	-	-	-	-	-	
d 144.2522473668	50	146.832384	-30.692	-2514	135.236482	33.80912	0.782608	Retro
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.58298	1.022181	Pro
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.58298	1.022181	Pro out
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.58298	1.022181	Pro inn
B 126.2207164460	47	123.470825	38.134	3124	118.331922	29.58298	1.022181	Pro out & inn

2.6.3 Zum supermassiven Schwarzen Loch Sgr A*

Für Sgr A* haben wir adäquate Grafiken und Stimmtabellen erstellt, wobei hier die Radien in geometrisierten Einheiten angegeben wurden, um die Kennzahlen leichter zu erfassen. Auch wurde auf die sukzessive Erhöhung von a verzichtet und nur die spezifischen Werte $a = [0, 0.9, 0.998, 1]$ dargestellt. Da die Masse des supermassiven Schwarzen Loches im Zentrum unserer Milchstraße $2.2 \approx 4.2 \text{ Mio}$ mal schwerer als die Sonnenmasse ist, ist es auch entsprechend größer, was man besonders an der negativen Oktavzahl -60 sieht, die den Abstand zum sichtbaren Spektrum angibt, und den verschiedenen Farben (Umlaufperioden). Ansonsten haben auch rotierende Schwarze Löcher „keine Haare“, also keinerlei individuelle Erscheinungsformen bis auf die Masse M und den Drehimpuls a . In der Realität kann Materie einfallen (dann spricht man von leuchtenden, aktiven galaktischen Kernen) oder nicht (dunkle, inaktive „Hungerlöcher“) und sie kann aus verschiedenen Richtungen einfallen, bis sie in den Framedrag gezwungen wird. D.h. wegen der disradierenden (zerstrahlenden) Materie können sie doch mehr oder weniger Strahlung emittieren in den verschiedenen Wellenlängenbereichen.

Das Schwarze Loch Sgr A* im Zentrum unserer Milchstraße bekommt derzeit jedoch wenig Materie „zu fressen“ und ist deshalb eine Art „Hungerloch“, jedoch mit nach jüngsten Berechnungen relativ großem Drehimpuls $a = 0.9$. Es gab aber Zeiten, zu denen es weitaus aktiver war, was die Forscher zu verschiedenen interessanten wissenschaftlichen Beobachtungen und Überlegungen geführt hat...

Kerr- black hole of SGT A*- mass



SGR A* for a = 0, spherical symmetric, Schwarzschild								
Period Specifications					Colors			
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [geometric]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values	
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	all	coord.	6	0.0005116564	-60	508.209	(2, 255, 42)	
	all	proper	6	0.0007235914	-59	718.716	(224, 1, 0)	
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	all	coord.	4	0.0009399728	-59	553.268	(172, 255, 1)	
	all	proper	4	0.0018799455	-58	553.268	(172, 255, 1)	
Photon Orbits (unstable)	all	coord.	3	0.0014471827	-58	718.716	(224, 1, 0)	
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	2	0	-	-	-	
	Pro inn	coord.	0	0	-	-	-	
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1	0	-	-	-	

6: For a=0 periods are spherical distributed. No rotation of the **outer**, infinitely fast rotation of the **inner** horizon - so no harmonical data

SGR A* for a = 0.9, estimated angular momentum of SGR A*								
Period Specifications					Colors			
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values	
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	8.7173522796	0.0003027516	-61	429.442	(66, 0, 255)	
		proper	8.7173522796	0.0003816874	-60	681.260	(254, 0, 0)	
	Pro	coord.	2.3208830418	0.0016952725	-58	613.538	(255, 139, 1)	
		proper	2.3208830418	0.0045710947	-57	455.083	(0, 95, 255)	
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	5.6568097504	0.0005989861	-60	434.114	(44, 0, 255)	
		proper	5.6568097504	0.0009643993	-59	539.255	(126, 255, 1)	
	Pro	coord.	1.7324555320	0.0023644838	-58	439.891	(8, 4, 255)	
		proper	1.7324555320	0.0137259735	-55	606.217	(255, 170, 1)	
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	3.9102679391	0.0011006192	-59	472.513	(0, 183, 254)	
	Pro	coord.	1.5578546274	0.0026436948	-58	393.432	(123, 0, 151)	
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	1.4358898944	0.0023566584	-58	441.351	(2, 9, 255)	
	Pro inn	coord.	0.5641101056	0.0059986550	-56	693.565	(254, 0, 0)	
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1	0.0037391181	-57	556.342	(182, 255, 1)	

7: The relatively high spin of a=0.9 is the raw estimated real rotation of the black hole in the center of our galaxy Milkyway in SGR A*

a = 0 continued								
Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
c 134.1276448794	48	130.812783	43.324	3549	125.744667	31.436167	0.905217	all
F# 94.8425672388	42	92.498606	43.324	3549	88.914907	22.228727	1.810434	all
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	all
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	all
F# 94.8425672388	42	92.498606	43.324	3549	88.914907	22.228727	1.810434	all
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro out
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro inn
-	-	-	-	-	-	-	-	Pro out & inn

a = 0.9 continued								
Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
d# 158.7290338624	51	155.563492	34.875	2857	148.808469	37.202117	0.646363	Retro
G 100.0570670024	43	97.998859	35.983	2948	93.803500	23.450875	1.626648	
A 111.1013793689	45	110.000000	17.248	1413	104.157543	26.039386	1.319320	Pro
d 149.7856326583	50	146.832384	34.475	2824	140.424031	35.106008	0.725853	
d# 157.0206203477	51	155.563492	16.141	1322	147.206832	36.801708	0.660505	Retro
B 126.4057429604	47	123.470825	40.670	3332	118.505384	29.626346	1.019191	
d# 154.9588070977	51	155.563492	-6.743	-552	145.273882	36.318470	0.678198	Pro
A 112.4431750077	45	110.000000	38.031	3116	105.415477	26.353869	1.288021	
d 144.2603657445	50	146.832384	-30.594	-2506	135.244093	33.811023	0.782519	Retro
f 173.2571815595	53	174.614116	-13.506	-1106	162.428608	40.607152	0.542509	Pro
d# 154.4459619517	51	155.563492	-12.482	-1022	144.793089	36.198272	0.682710	Pro out
G 98.2819638270	43	97.998859	4.994	409	92.139341	23.034835	1.685938	Pro inn
B 122.5234231990	47	123.470825	-13.335	-1092	114.865709	28.716427	1.084803	Pro out & inn

SGR A* for a = 0.998, physical limit, Thorne- limit							
Period Specifications					Colors		
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	8.9943744548	0.0002894819	-61	449.127	(0, 61, 255)
		proper	8.9943744548	0.0003621748	-60	717.964	(225, 1, 0)
	Pro	coord.	1.2369706552	0.0031678931	-57	656.660	(254, 0, 0)
		proper	1.2369706552	0.0341845536	-54	486.823	(0, 245, 252)
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	5.8250125575	0.0005757562	-60	451.630	(0, 75, 255)
		proper	5.8250125575	0.0009132941	-59	569.430	(224, 254, 1)
	Pro	coord.	1.0914427191	0.0035167869	-57	591.514	(255, 216, 1)
		proper	1.0914427191	0.1540597918	-52	432.087	(52, 0, 255)
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	3.9982218928	0.0010747664	-59	483.879	(0, 233, 253)
	Pro	coord.	1.0739092577	0.0035623789	-57	583.944	(254, 245, 1)
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	1.0632139225	0.0035292721	-57	589.421	(255, 224, 1)
	Pro inn	coord.	0.9367860775	0.0040055796	-57	519.333	(46, 255, 1)
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1	0.0037598835	-57	553.269	(172, 255, 1)

8: The Thorne- limit $a=0.998$ sets a physical upper limit for the stability of rotation and so the possible existence of black holes in reality

SGR A* for a = 1.0, Extreme- Kerr							
Period Specifications					Colors		
Circular equator. Orbits	Direction	Time-flow	Radius in [m]	Frequency in [Hz]	n	Wavelength [nm]	RGB-values
Marginally Stable Orbits for Particles (stable)	Retro	coord.	9	0.0002892224	-61	449.530	(0, 63, 255)
		proper	9	0.0003617957	-60	718.716	(224, 1, 0)
	Pro	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)
		proper	1	∞	-	-	-
Marginally Bound Orbits for Particles (unstable)	Retro	coord.	5.8284271247	0.0005752997	-60	451.988	(0, 79, 255)
		proper	5.8284271247	0.0009123025	-59	570.049	(226, 254, 1)
	Pro	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)
		proper	1	∞	-	-	-
Photon Orbits (unstable)	Retro	coord.	4	0.0010742546	-59	484.110	(0, 233, 253)
	Pro	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)
Kerr - Horizons Rota.	Pro out	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)
	Pro inn	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)
Extreme KN Horizons Rota.	Pro out & inn	coord.	1	0.0037598910	-57	553.268	(172, 255, 1)

9: The Extreme- Kerr $a=1$ is the theoretical limit of maximum rotation: very interesting for theoretical and philosophical considerations

a = 0.998 continued

Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
d# 151.7719014857	51	155.563492	-42.719	-3500	142.286158	35.571539	0.706979	Retro
F# 94.9419509473	42	92.498606	45.137	3698	89.008079	22.252020	1.806645	
G# 103.8055220145	44	103.826174	-0.344	-28	97.317677	24.329419	1.511292	Pro
c# 140.0199317418	49	138.591315	17.754	1454	131.268686	32.817172	0.830634	
d 150.9310435807	50	146.832384	47.663	3905	141.497853	35.374463	0.714878	Retro
A# 119.7072822473	46	116.540940	46.409	3802	112.225577	28.056394	1.136444	
A# 115.2380741125	46	116.540940	-19.463	-1594	108.035694	27.008924	1.226301	Pro
d# 157.7572268278	51	155.563492	24.243	1986	147.897400	36.974350	0.654351	
c# 140.8717856240	49	138.591315	28.255	2315	132.067299	33.016825	0.820618	Retro
A# 116.7320301926	46	116.540940	2.836	232	109.436278	27.359070	1.195113	Pro
A# 115.6471882672	46	116.540940	-13.328	-1092	108.419239	27.104810	1.217640	Pro out
c 131.2548335433	48	130.812783	5.840	478	123.051406	30.762852	0.945276	Pro inn
B 123.2038619819	47	123.470825	-3.747	-307	115.503621	28.875905	1.072854	Pro out & inn

a = 1.0 continued

Tones					Beats	Pendulum		
Tone p=42 [Hz]	MNN	FN1 [Hz]	Cent	Pitch	p=48 [BPM]	p=50 [BPM]	Pendulum length [m]	Direction
d# 151.6358263181	51	155.563492	-44.271	-3627	142.158587	35.539647	0.708248	Retro
F# 94.8425672388	42	92.498606	43.324	3549	88.914907	22.228727	1.810434	
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.072850	Pro
-	-	-	-	-	-	-	-	
d 150.8113775024	50	146.832384	46.290	3792	141.385666	35.346417	0.716013	Retro
A# 119.5773185416	46	116.540940	44.528	3648	112.103736	28.025934	1.138916	
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.072850	Pro
-	-	-	-	-	-	-	-	
c# 140.8046958668	49	138.591315	27.430	2247	132.004402	33.001101	0.82140	Retro
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	Pro
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	Pro out
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	Pro inn
B 123.2041088834	47	123.470825	-3.744	-307	115.503852	28.875963	1.07285	Pro out & inn

3 Der Ton der Einheit und die Planck- Kerr- Einheitsgrößen

Wir nehmen nun den Gedanken der Berechnung der Planckschen Einheitsgrößen von S. 6 wieder auf, nun aber nicht nach der Newtonschen Approximation sondern nach Extrem- Kerr in Boyer- Lindquist-Koordinaten. Eine Umlaufperiode in Eigenzeit gibt es für Photonen und auch für die Rotation des Horizontes nicht (Null- Geodäte). Aber auch hier gilt: halbiert man die Masse M des Loches, so halbiert sich auch dessen Radius und Umfang, während sich die Gravitationsfrequenz (was hier die halb so große Rotationsfrequenz des Horizontes S. 14 bei Extrem-Kerr ist), die Quantenenergie und Quantenmasse m wieder verdoppeln. Auch hier entspricht bei fortwährender Verkleinerung irgendwann die Masse m eines einzigen Photons auf der äquatorialen Lichtkreisbahn entlang des Extrem- Kerr- Horizontes der Masse M des winzigen Loches. Um dies zu berechnen, setzen wir die Rotationsfrequenz des Horizontes Gl. 34 über die Masse mit der Quantenfrequenz aus Gl. 6 gleich. Jedoch gilt es nun etwas zu beachten!

Denn die Formel für die Masse des Photons in Gl. 7 gilt für ein mit c reisendes Licht in der quasi- flachen RZ. Aber dadurch, dass die RZ am Horizont nur mit $c/2$ rotiert, sollte das Photon, das hier in die RZ eingebakken ist, eine Massenhälfierung hinsichtlich seiner superflachen Koordinaten- Frequenz erfahren: $m = \frac{hf}{2c^2}$, sodass die Gleichsetzung von S. 7 nun so aussieht:

$$\frac{c^3}{4\pi G f_{H,0}} = M = m = \frac{hf}{2c^2} \quad (39)$$

womit wir für die gleichgesetzte Kerr- Einheits-Frequenz erhalten:

$${}^\circ f = \sqrt{\frac{c^5}{2\pi Gh}} = 2,9521 \cdot 10^{42} \text{ Hz} \quad (40)$$

Nach dieser Berechnung entspricht die Kerr-Einheitsfrequenz genau der unfizierten Planck-Einheitsfrequenz aus Gl. 8 von S. 6 der Newtonschen Approximation! Aber die Größe dieser 'Kerr- Einheit' ist nur halb so groß wie die 'Planck- Einheit', was die Einheitsmasse halbiert: ${}^\circ M = \sqrt{\frac{ch}{8\pi G}} = 1,0882 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$. Und da der Horizont nur mit $\frac{c}{2}$ rotiert gilt: $\frac{c}{2} = {}^\circ \lambda {}^\circ f$, sodass auch die Einheits-Wellenlänge (äquat. Horizont- Umfang) um $\frac{1}{2}$ kleiner ist: ${}^\circ \lambda = \sqrt{\frac{\pi Gh}{2c^3}} = 5,0776 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ und auch der 'Kerr- Radius' misst nur die Hälfte des 'Planck- Radius': ${}^*R = \sqrt{\frac{Gh}{8\pi c^3}} = 8,0812 \cdot 10^{-36} \text{ m}$. Auch hier erscheint die Gravitationskonstante G wieder, sodass die Genauigkeit nur max. 5 Stellen erreicht. Die harmonikale Daten (Farbe 92 Oktaven tiefer, danach nochmals Ton 42, Tempo 48 tiefer) werden ja

von der Frequenz abgeleitet und entsprechen genau denjenigen der unfizierten Planck- Einheit:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2^{92} \cdot c \cdot \frac{1}{{}^\circ f} = 502,862 \text{ nm} \\ f &= \frac{c}{2^{42} \cdot \lambda} = 135,554 \text{ Hz} \\ B &= \frac{60c}{2^{48} \cdot \lambda} = 127,082 \text{ bpm} \end{aligned} \quad (41)$$

Als ich im Jahr 2008 entdeckt hatte, dass der nach der Newtonschen Approximation berechnete Einheitston mit 135,571 Hz im mittleren Bereich des elliptischen Jahrestones liegt und damit ein OM-Herzton ist, war ich sehr entzückt. Den Planck-Kerr- Ton habe ich (als Tritonus am 26.02.2025) als gleiche Planckfrequenz am 23.07.2025 entdeckt und bin wieder sehr erfreut. Allerdings bin ich kein Fachmann in diesen Dingen und würde gern hören, was die theoretischen Physiker von meinen Überlegungen übrig lassen würden...

4 Der Sonnenton als Basis eines Oktav- logarithmischen Maßsystems

Die ägyptische Cheops- Pyramide beinhaltet die Kreiszahl π und so die Kunst der Quadratur des Kreises, und symbolisiert die Erde im Maßstab 1:43200, was die Hälfte der heutigen Sekunden des Tages ist. So entspricht ihr Umfang (Summe der 4 Grundkanten) dem Erdäquatorumfang : 43200 und ihre Höhe dem Erdradius : 43200 = 147,64m, , was wiederum dem Gravitationsradius der Sonne (Gl. 3 S. 5) geteilt durch die für die alten Ägypter heilige Zehnzahl sehr nahe kommt.¹⁵ Dies soll nur darauf hinweisen, dass diese Zahl schon bei den Alten in Würden stand.

In der Vergangenheit gab das „Messen mit zweierlei Maß“ schon oft Anlass zum Streit, sodass das Bedürfnis nach Vereinheitlichung der Maße immer wieder auf den Plan trat. Heute ist das SI- System zwar eine globale Forderung, doch halten sich verschiedene Länder nicht daran. Wenn ein Maßsystem noch nicht ausgereift ist, fehlt ihm die innere Überzeugungskraft, die zu seiner raschen Akzeptanz nötig wäre. Erscheint dann ein neues, überzeugendes System, ist es oft besser das alte so zu belassen und ganz neu anzufangen. Unser Anliegen betrifft jedoch mehr die Tatsache, dass wir nicht nur ein lineares Maßsystem brauchen, sondern auch Bedarf nach einem logarithmischen Maßsystem besteht, das nicht nur für die große Welt der Schwingungen, sondern auch für die universale Orientierung die erste Wahl wäre.

¹⁵Die ausführliche und sehr lesenswerte Diskussion mit Berechnungen findet sich bei [3] S. 82ff

Das lineare SI- System nimmt seinen Ausgang von den Proportionen der Erde: der Meter ist ursprünglich ein 40- Millionstel eines Großkreises der Erde, die Sekunde ist ein 86400stel der Tagesdauer usw. Lässt sich nun ein logarithmisches Maßsystem von der Sonne ableiten? Natürlich ist die Sonne ein G- Stern unter vielen mit ganz bestimmten Eigenschaften. Aber sie ist das Gravizentrum der Planetenbewegungen und damit Ordnungsprinzip unseres Sonnenkosmos. Und für alle Lebewesen der Erde spendet sie das lebensnötige Licht, woran die Menschen evolutionär ihre Sehkraft angepasst haben.

Nun ist der Gravitationsparameter der Sonne sehr genau bekannt: $GM_{\odot} = 1.32712440042 \cdot 10^{20} m^3/s^2$ und damit ist auch der Boyer- Lindquist- Gravitationsradius in gleicher Genauigkeit auf heute 10 Stellen angebar: $R_{G,\odot} = \frac{GM}{c^2} = 1476.625038509 m$ sowie der Umfang $U_{G,\odot} = 2\pi \cdot R_G = 9277.908746 m$, daraus ließe sich dann über die Lichtgeschwindigkeit das solare Zeitmaß ableiten und die übrigen Maßgrößen. Aber hier liegt nicht der Schwachpunkt des SI- Systems. Aus harmonikaler Sicht liegt sein Schwachpunkt vielmehr darin, dass die Farben des sichtbaren Spektrums, die Töne der Musik und die Tempi, ja die ganze Welt der Schwingungen nicht elegant in diesem Maßsystem dargestellt werden, wozu ein oktavlogarithmisches Maßsystem geeigneter wäre. Und eben dafür scheint mir der Sonnenton ein besseres Ordnungsprinzip zu sein, denn: der Sonnenton liegt für Extrem- Kerr (welcher Fall genau genug ist) im höchsten Hörbereich und 35 mal hoch oktaviert so ziemlich in der Mitte des Spektrums bei $\lambda = 540,0453663 nm$, sodass sich die Ober- und Unterkante des Spektrums jeweils durch den auf- und absteigenden Tritonus \times bzw. $\div \sqrt{2}$ leicht definieren ließen.

Nun ist die genaue Definition des Spektrums innerhalb einer Oktave für die oktavlogarithmische Vermessung des Universums (*formula mundi*) ungemein wichtig! Dabei nämlich nutzen wir die Oktave des sichtbaren Spektrums als naturgegebene Maßskala für die Vermessung des Universums (Nulloktave). Dann bildet der Frequenzbereich 35 - 45 Oktaven unterhalb des sichtbaren Spektrums sehr genau unseren Hörbereich ab, sodass wir die Tonleiter hier 10 mal oktav analog abbilden können. Alle Frequenzen gleich welcher Art (akustische, elektromagnetische, Rotationen usw.) können nach dem Frequenzmaß gleichermaßen abgetragen werden. So kann man es als einen glücklichen Zufall ansehen, dass das sichtbare Spektrum des Sonnenlichtes durch den Sonnenton in der Mitte und die auf- und absteigenden Tritoni elegant eingeteilt werden kann. Die Grafik auf S. 35 zeigt diese Tatsache und bietet sogleich eine entsprechende Einteilung in die 12 Töne der gleichstufigen Tonleiter an.

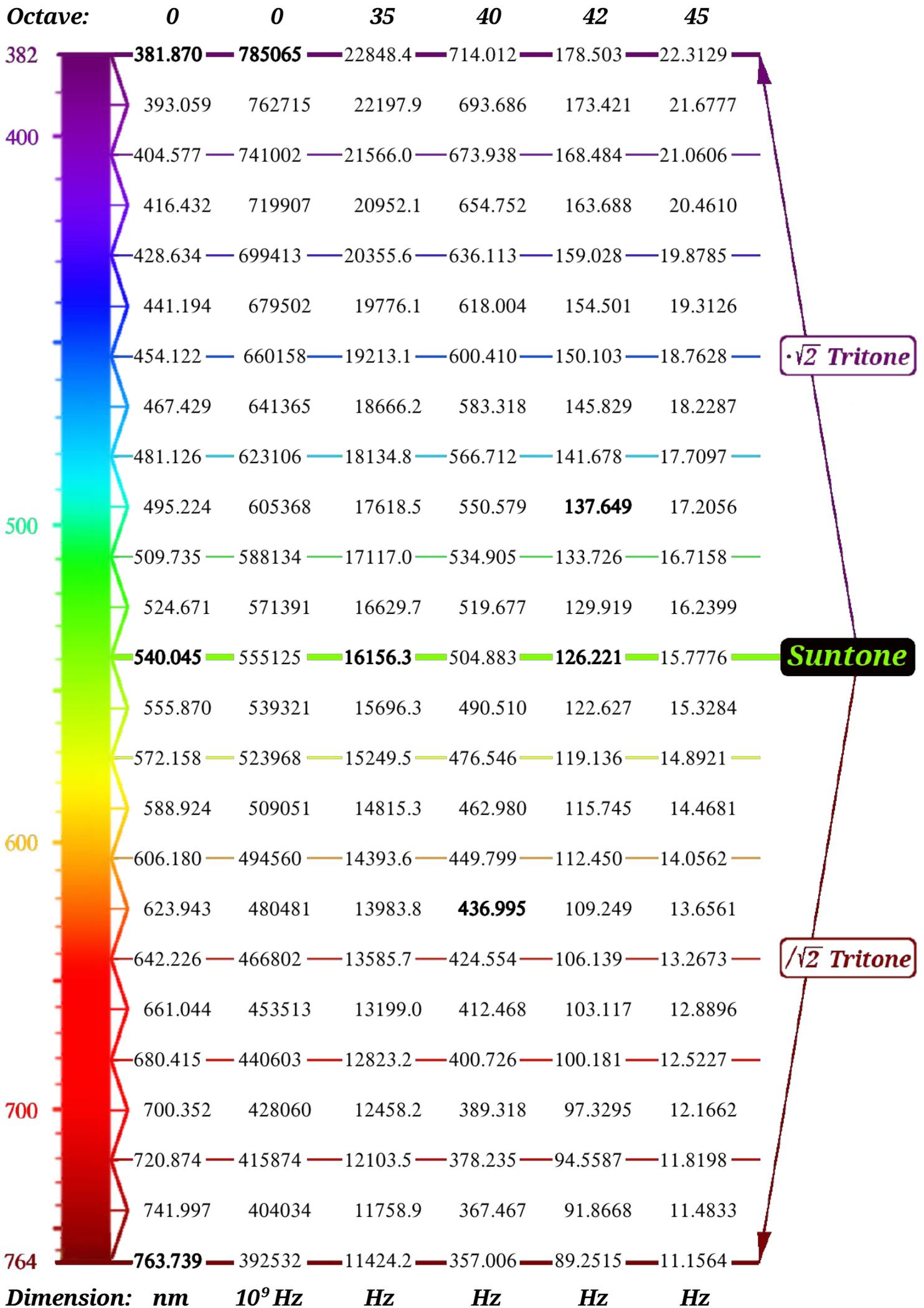
Zur Grafik S. 35: Da der Sonnenton im höchsten Hörbereich liegt und 35 Oktaven höher so ziemlich genau in die Mitte des sichtbaren Farbspektrums fällt, bietet es sich an, vom Sonnenton den aufsteigenden

und absteigenden Tritonus zu bilden und so den oberen und unteren Grenzwert des Spektrums präzise zu definieren. Obwohl das Spektrum unter günstigen Bedingungen etwa von 360 nm bis 780 nm sichtbar ist, und somit mehr als eine Oktave umfasst, erhielte man durch unsere Begrenzung des Spektrums den mittleren Bereich der wohlunterscheidbaren Farben¹⁶ innerhalb genau einer Oktave und könnte damit dieses Spektrum prima zur oktav- logarithmischen Vermessung des Universums nutzen. Diese Vermessung der Welt ist Anliegen meiner enzyklopädischen *formula mundi*, die auf diese Weise die Oktave des Spektrums als naturgegebene Maßskala nutzt, deren oberer Grenzwert der Basiswert für sämtliche 203 Oktaven der *formula* darstellt (vom Planck- Radius aus bis zum Radius des sichtbaren Universums; neuerdings 204 Oktaven: vom Kerr- Planck- Radius aus...).

Wie beschrieben entspricht der Sonnenton bei einem maximal rotierenden Schwarzen Loch von Sonnenmasse (Extrem- Kerr) der Rotationsfrequenz des Horizontes und aller mit ihm rotierenden Partikel und Photonen in der Äquatorebene. Seine Frequenz liegt mit $f_{\odot} = 16156,25170508 Hz$ in der höchsten Oktave des Hörbereichs (der insgesamt etwa 10 Oktaven umfasst). Von diesem bilden wir den aufsteigenden Tritonus und oktavierem 35 mal hoch um den Oberwert des Spektrums als Basiswert der *formula* in [Hz] zu erhalten: $f_{Basis} = f_{\odot} \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{35} = 785064712097070 Hz$. Die übliche Angabe der Lichtfrequenzen in [nm] erhalten wir aus der Berechnung mit der Lichtgeschwindigkeit c zu: $\lambda_{Basis} = c/f_{Basis} = 381.8697406475 nm$. Von diesem Basiswert aus wird oktaviert (verdoppelt oder halbiert) um die Welt in Oktaven einzuteilen und zu vermessen. Alle so gewonnenen Angaben sind wie der ursprüngliche Gravitationsparameter der Sonne auf 10 Stellen genau und deswegen hinreichend.

Dazu werden Farbspektrum und Hörbereich in einem gemeinsamen System erfasst, das auch alle Bereiche der elektromag. Wechselwirkung (Gamma, Röntgen, UV, Vis, IR, RAMAN, NMR, Mikro- und Radiowellen usw.) sowie generell alle Zeiten bzw. Frequenzen und Längen bzw. Entfernungen der Welt umfasst. Die Zwölf- Ton- Teilung des Spektrums wiederholt sich durchgehend, und im Hörbereich erhalten wir so eine neue gleichstufige Tonleiter, deren diskrete Tonfrequenzen in der höchsten 35. und tiefsten 45. Oktave unter dem Spektrum abgebildet sind. Dazu ist auch die 40. Unteroktave wegen des Vergleichs zum hier liegenden Kammerton von 440 Hz, als auch die 42. Unteroktave wegen des Vergleichs zur Standardangabe des OM- Jahrestones mit 136,01 Hz berechnet.

¹⁶Das Farbsehen ist auch von der Intensität des Lichtes abhängig, sodass es bathochrome und hypochrome Verschiebungen der Farben ja nach Lichtintensität gibt. Dies wäre also noch entsprechend zu normieren und mit dem allgemeinen, durchschnittlichen Farbempfinden der Menschen zu harmonisieren.



In der modernen elektronischen Musikkultur ist es üblich Abweichungen von MIDI- Normtönen durch Cent- Abweichungen zu erwirken. Deswegen gibt es um die diskreten Normtöne einen Bereich zu je 1/4 Ton nach oben und unten, sodass wir auch die Tonbereiche um die Normtöne haben, die wiederum Grenzwerte haben, die hier mit berechnet wurden und auf den durchgezogenen Linien liegen.

Die so durch den Gravitationsparameter der Sonne und den Sonnenton erreichte neue Normierung des Spektrums und des Hörbereiches, sowie aller anderen Größenordnungen, macht die Orientierung in unseren Maßsystemen wesentlich leichter. Messbereiche wurden meist in den Einzelwissenschaften (Farbenlehre, Musik, Spektroskopie, Geschichtsschreibung, Kosmologie usw.) sinnvoll erschlossen und aufgefüllt. Die *formula mundi* ist ein groß angelegter Versuch der Unifizierung der Maßsysteme unter dem übergeordneten Konzept der Oktav- Vermessung der Welt und als Eichgröße bietet sich wie gesagt der genaue Gravitationsparameter der Sonne und der durch die Extrem- Kerr- Metrik gewonnene Sonnenton an.

Nun ist die Sonne eine mittlere Sternen- Größe. Wollte man ein Maßsystem von universaler Geltung erschaffen, so würde man die universellen Planckgrößen (besser die Planck- Kerr- Größen) zur Basis wählen. Andererseits böten auch etwa die Spektrallinien des Wasserstoffes als des häufigsten Elementes im Universum eine universelle Basis. Warum also die Sonne und ihr theoretischer Ton? Nun, die Planckgrößen oder Spektrallinien sind zwar universeller als der Sonnenton, aber sie sind auch unhandlich klein. Der Gravitationsradius der Sonne liegt mit 1,476 km in der Größenordnung des Kilometers, der Umfang bei etwa 10 km.

Die Sonne ist das Zentrum unseres Planetensystems, der Sonnenton ist der abstrakte Inbegriff der Bewegungen der Planeten. Die Sonne spendet das Licht und die Wärme und damit das Leben auf der Erde. Die Vermessung der Welt soll zuallererst den Menschen auf der Erde dienen, die mit ihren Augen ein Farbspektrum sehen und mit ihren Ohren einen Hörbereich erfassen können. Solcherart kann man es als Glück oder gute Fügung verstehen, dass der Sonnenton geeignet ist das sichtbare Farbspektrum zu gliedern und uns gleichzeitig ein Tonsystem offeriert, das „vom Himmel“ kommt, nämlich von unserer lieben Sonne :)

5 Mathematik bestimmt die Physik: Das neue virtuelle Weltmodell

Die **Schöpfungs- Weltbilder** der alten Religionen sind Ein- Ebenen- Weltmodell die von der Realitätsebene

Gottes und der Seelen ausgehen und damit vom Geist. Ich denke man könnte beweisen, dass in unserem Universum sich entwickelnde höhere Evolutionen immer zuerst solche subjektiven Weltbilder entwickeln werden. Das seit GALILEO GALILEI (1564 - 1642) eingezogene **Objektive Weltbild** ist ebenso ein Ein- Ebenen- Weltmodell, es geht allerdings von der materiellen Ebene der Wirkungen aus und ergründet die äußere Natur. Ich denke man könnte beweisen, dass für in unserem Universum sich entwickelnde höhere Evolutionen, zu einem gewissen Zeitpunkt das objektive Weltbild obsiegen wird, einfach weil die Erforschung der Materie zu besseren Waffen führt, da hilft der Glaube nichts.

Das **neue Virtuelle Weltbild** ist dagegen ein Mehr- Ebenen- Weltmodell, das subjektive und objektive Seinsebenen integriert. Der Erste westliche Wissenschaftler, der in dieser Weise gedacht hat war der EINSTEIN- Schüler JOHN A. WHEELER (1911 - 2008), als er sich intensiv mit den Quantenparadoxien beschäftigt hat. Zu WHEELERS Zeit gab es schon Computer und die ersten Computerspiele. Er verstand, dass die Welt der Quanten offenbar ähnlich einem Computerspiel zu verstehen sei: Eine abstrakte Kalkulations- Ebene, die unanschaulich aber sehr genau berechenbar ist, und eine Spielerebene, auf der die abstrakten Berechnungen zu einer anschaulichen Repräsentation in einer virtuellen Realität führen, wo man etwa eine Spielfigur bewegen kann. Zusätzlich könnte man noch sagen, dass die Ebene der spielenden Person, die vor dem Computer sitzt, die Ebene der Ursachen ist, soweit ein freier Wille das Spiel lenkt. WHEELER schrieb dazu das berühmte Buch „It from Bit“ also etwa: „DAS (die Welt) stammt von Bits (von programmierten Informationen)“. Bekannte Vertreter des virtuellen Weltbildes sind heute der MONROE- Schüler THOMAS W. CAMPBELL (GEB. 1944, „My big TOE“), PROF. DONALD D. HOFFMAN (GEB. 1955) oder BERNARDO KASTRUP (GEB. 1974).

Wir wollen hier noch nicht herausfinden, wie dieses Weltbild strukturiert ist, etwa wie viele Ebenen es letztendlich braucht um die Welt vollständig zu beschreiben. Zudem wissen wir seit KURT F. GÖDEL (1906 - 1978), dass eine sowohl widerspruchsfreie als auch vollständige Beschreibung nicht möglich ist: Es wird also ein offenes Weltsystem sein mit einigen Grundannahmen. Dazu können wir die Forderung WERNER K. HEISENBERGS (1901 - 1976) nach einer Weltformel schon konkretisieren: Eine Formel ist eine zeitlose Gleichung, die eine dynamische Welt nicht adäquat erfassen kann. Die Formeln gehören in einen Code, der unter dem Zeitmaß einer Taktfrequenz zum Laufen gebracht wird. Das ist der große Unterschied, dass ein laufender Code dynamisch variierbar ist, sodass die Routinen der Natur und der Seele dynamisch darstellbar werden.

Das Modell der virtuellen Welt ist in vielerlei Hinsicht leistungsfähig, ob es um das Verständnis der Quantenparadoxien geht oder um die Tatsache, dass unsere Seele verschiedene Parallel- Welten erfahren kann. Aber hier, bei der Behandlung Schwarzer Löcher bekommen wir noch einen weiteren, wissenschaftsgeschichtlichen Zugang: Rekapitulieren wir die europäische Geistesgeschichte, so war NIKOLAUS KOPERNIKUS (1473 - 1543) der große Revolutionär. Das geozentrische Weltmodell der christlichen Religion wurde durch seine Erkenntnis, dass die Erde nicht im Mittelpunkt des Alls ruht, sondern dieselbe sich um die Sonne dreht, geradezu obsolet. Heute etablieren wir ein noch weiter übergeordnetes Bezugssystem: Die Sonne und alle Sterne unserer Galaxie drehen sich um das Schwarze Loch SGR A* im Zentrum unserer Milchstrasse. Aber das Besondere an diesem Wechsel des Bezugssystems ist nun: Es handelt sich dabei gar nicht um ein materielles Objekt, sondern um ein mathematisches Objekt! EINSTEINS Erklärung der Gravitation durch die Krümmung der Raumzeit ist schon eine Geometrisierung der Physik: die urphysikalischen Begriffe von Masse, Energie, Drehimpuls usw. werden durch Krümmungstensoren, also rein geometrisch repräsentiert. Bei Schwarzen Löchern haben wir nun das Krümmungs- Phänomen in einer Art lokalen Konzentration: Unter bestimmten Bedingungen kann sich die Raumzeit umstülpen, also in sich selbst zusammenfallen und einen neuen Stabilitätszustand einnehmen: ein Schwarzes Loch. Der Massebegriff ist hier nur noch stellvertretend für den Radius und Drehimpuls des Horizontes, tatsächlich aber gibt es keine Atome, Quarks oder sonstige Teilchen mehr die Masse beitragen. Die Masse ist nirgendwo konzentriert, sie ist ein Begleiterscheinung der Krümmung der Raumzeit. Solcherart ist es berechtigt von SGR A* als von einem mathematischen Objekt zu sprechen. Aber was bedeutet das für unser Weltbild?

Die große philosophische Frage nach dem Status der Mathematik, nämlich ob sie Erfindung oder Entdeckung des Menschen sei, erfährt eine völlig neue Wendung! Wer sich mit der Geschichte der Zahlen, der verschiedenen Zahlensysteme und Rechenoperationen beschäftigt hat sich klar darüber sein: Zahlen sind vom Menschen verschiedentlich erfunden und entwickelt worden. Zahlen kommen in der Natur nicht vor, sie sind Ideen des menschlichen Geistes, das bedarf keines Beweises, es ist evident. Deswegen sehe ich die Mathematik, die mit Zahlen operiert, als die reine Geisteswissenschaft an: sie operiert letztlich mit menschlichen Ideen. Wenn Schwarze Löcher nun als wesentlich mathematische Objekte verstanden werden müssen, die durch eine verhältnismäßig einfache mathematische Routine aller Materie der Galaxis ihr Bewegungsgesetz gibt, was sagt das über den Status der Mathematik aus?

Menschen haben die Schwarzen Löcher berechnet, aber sie haben sie nicht erfunden, vielmehr liegt hier die Mathematik dem Sein der Natur zugrunde. Man kann nicht in Schwarze Löcher hinein schauen, sie sind nur mit dem geistigen Auge ergründbar - wie es schon ARISTOTELES (384 v. - 322 v.) von seinem Unbewegten Beweger aussagte. Doch das geistige Auge sieht hier nur Geistiges, nämlich das, was aus der Interpretation mathematischer Beziehungen zu verstehen ist.

Das Zentrum unserer Galaxie ist ein relativ einfaches (Masse und Drehimpuls) mathematisches Objekt. Schauen wir mit dem geistigen Auge hinein, so ist es, als wenn wir aus der virtuellen Natur- Ebene in die darunter liegende Ebene der mathematischen Ursachen, der Programmierung schauen. Soviel sei hier zum Thema gesagt.

Ich hoffe ich konnte etwas deutlich machen, warum uns die Entdeckung Schwarzer Löcher vor neue weltanschauliche Herausforderungen stellt.

References

- [1] William H. Bardeen, James M. & Press. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 178:347–369, 1972.
- [2] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [3] Hans Cousto. *Die Kosmische Oktave*. Synthesis Verlag, 1984.
- [4] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company New York, 1973.
- [5] Thomas A. Moore. *A General Relativity Workbook*. University Science Books, 2013.
- [6] Andreas Müller. *Black Hole Astrophysics: Magnetohydrodynamics on the Kerr Geometry*. PhD thesis, 2004.
- [7] Derek Raine and Edwin Thomas. *Black Holes*. Imperial College Press, London, 3rd edition, 2015.
- [8] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Exploring Black Holes*. Addison Wesley Longman, Inc., 2000.