# $H_2$

# Der Klang
# der Wasserstoffmoleküle

## (Teil 2) Stimmschlüssel für Akustiker


E-Mail-Adresse des Autors: cousto@eve-rave.net

# Inhalt

# Intro

Beim Gebrauch von Instrumenten mit 12 Tönen in der Oktave ist man genötigt, Kompromisse einzugehen. Auf rein gestimmten Instrumenten kann nur eine Tonart rein gespielt werden, auf mitteltönig gestimmten nur wenige Tonarten und in diesen kommen schon gewisse Unreinheiten vor, auf wohltemperiert gestimmten alle Tonarten, manche reiner als andere, aber alle mit Unreinheiten, und auf gleichstufig gestimmten oder gleichmäßig temperiert gestimmten alle Tonarten, jedoch alle gleichermaßen unrein. Heutzutage sind die meisten Tasteninstrumente gleichstufig gestimmt, manche Orgeln und Cembali mitteltönig oder wohltemperiert. Wohl temperiert heißt nicht gleichstufig, jede Tonart hat noch Ihr Charakteristikum.

Durch die Gewöhnung an die gleichstufige Normstimmung, in der außer der Prime und der Oktave alle Intervalle unrein gestimmt sind, ist das Feingefühl für unterschiedliche Intervalle weitgehend verloren gegangen. Intervalle sind jedoch Ausdruck von Naturgegebenheiten (Naturgesetzen) und vermitteln auf akustischer Ebene Strukturen der Welt, wie sie naturgegeben sind. Übungen in der Stimmkunst dienen somit nicht nur dem Einstimmen von Instrumenten zum (gemeinsamen) Spiel, sondern offenbaren dem Übenden auch tiefe Einblicke in die Strukturen des Daseins.

Das Erste Kapitel dieser Abhandlung widmet sich ganz den Intervallen, ihren Verknüpfungen und der Technik, sie zu berechnen und einzustimmen.

Das zweite Kapitel beinhaltet den Stimmschlüssel zu den Tönen der Spektrallinien des Wasserstoffs. Voraussetzung zur Einstimmung dieser Töne sind die im ersten Kapitel gegebenen Grundkenntnisse zu den Intervallen und ihren Verknüpfungen.

Der Stimmschlüssel zu den Tönen der Spektrallinien des Wasserstoffs beinhaltet alle Angaben, um vom gegebenen Ton der Rydbergkonstante (in der 43. Unteroktave ein fis‘ mit 373,808 Hz) mittels Quinten, natürlichen großen Terzen und Naturseptimen sämtliche Töne des Wasserstoffspektrums rein akustisch nach Gehör einzustimmen. Mit Ausnahme von zwei Tönen (Brackett-Gamma-Linie und Pfund-Alpha-Linie) können alle Töne vollkommen rein, das heißt, ohne Schwebungen zählen zu müssen, eingestimmt werden. Nur die beiden letztgenannten Töne erfordern eine Stimmtechnik, wie sie von jedem Klavierstimmer genutzt wird, bei der die Töne zuerst absolut rein gestimmt und danach leicht verstimmt werden, wobei die Größenordnung der Verstimmung durch das Zählen von Schwebungen gehandhabt und festgestellt wird.

Die Anhörung der Töne des Wasserstoffspektrums offenbart nochmals auf einer ganz anderen Ebene gegebene Strukturen des Daseins – die Anhörung der Töne des Wasserstoffspektrums läßt einen die Grundlagen der Quantenphysik erlauschen.

Die naturwissenschaftliche Methodik der Transkription der Wasserstoffspektren in den Hörbereich ist im Skriptum *„$H_2$ – Der Klang der Wasserstoffmoleküle – Musikalische Transkription der Wasserstoffspektren – Die physikalischen Grundlagen zur Anhörung der Quantentheorie“* (Teil 1) beschrieben und wird hier nicht nochmals erklärt und erläutert. Das Skriptum ist im Internet abrufbar unter der Adresse http://www.planetware.de/tune_in/wasserstoff-1.pdf

Berlin, im Mai 2003
Hans Cousto

# 1 Intervalle

Intervalle sind die Abstände von jeweils zwei Tönen zueinander. Die Namen der Intervalle werden von der Stammtonreihe abgeleitet, wobei die Tonstufen mit lateinischen Namen durchnummeriert werden, das heißt, die Intervalle werden für die Benennung vom Grundton aus gebildet. Das erste Intervall, die Prime, erhält die Ordnungszahl 1. Wenn zwei Töne den Abstand von einer Prime haben, das heißt, wenn sie den Abstand 0 haben, dann haben sie die gleiche Tonhöhe. Mit dem achten Intervall, der Oktave, wird die Stammtonreihe beendet und in der nächst höher liegenden Oktave mit den gleichen Tonnamen fortgesetzt, wobei dann die Tonnamen mit einem Stich gekennzeichnet werden (c wird zu c‘, d wird zu d‘ und so weiter). In jeder weiteren höher liegenden Oktave wird jeweils zur Kennzeichnung der Oktavlage ein weiterer Strich hinzugefügt (aus c‘ wird in der nächst höheren Oktave ein c‘‘, dann ein c‘‘‘ und so weiter). Im folgenden Beispiel vom Grundton der klassischen C-dur Tonleiter aus heißen die Tonstufen und die Intervalle wie folgt:

**1 zu 1 = c zu c = Prime (lat. *primus* = der Erste)**
**1 zu 2 = c zu d =Sekunde (lat. *secundus* = der Zweite)**
**1 zu 3 = c zu e = Terz (lat. *tertius* = der Dritte)**
**1 zu 4 = c zu f = Quarte (lat. *quartus* = der Vierte)**
**1 zu 5 = c zu g = Quinte (lat. *quintus* = der Fünfte)**
**1 zu 6 = c zu a = Sexte (lat. *sextus* = der Sechste)**
**1 zu 7 = c zu h = Septime (lat. *septimus* = der Siebte)**
**1 zu 8 = c zu c‘ = Oktave (lat. *oktavus* = der Achte)**

Die Intervalle werden in zwei Gruppen eingeteilt. Intervalle mit **einer** Grundform und Intervalle mit **zwei** Grundformen. Die **Intervalle** mit **einer Grundform** sind die **Prime**, die **Quarte**, die **Quinte** und die **Oktave**. Da sie nur eine Grundform haben, werden sie auch als **reine Intervalle** bezeichnet. Die vier reine Intervalle werden durch den Grundton und die ersten drei Obertöne der Obertonreihe[1] respektive durch die ersten vier Teiltöne der Teiltonreihe[2] gebildet.

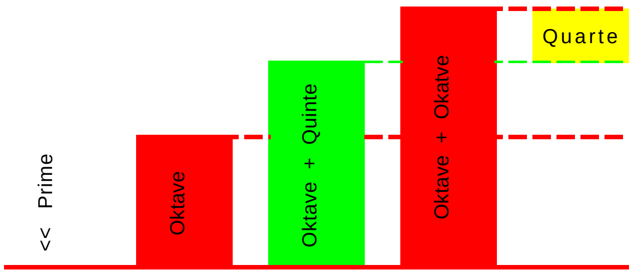



**Abb. 1** zeigt die harmonikale Verknüpfung der reinen Intervalle. Von Links nach rechts erscheinen der Reihe nach der 1. Teilton (Prime), der 2. Teilton (Oktave), der 3. Teilton (Duodezime = Oktave + Quinte), der 4. Teilton (doppelte Oktave) und ganz rechts im Bild das Differenzintervall zwischen dem 3. und 4. Teilton (Quarte). Die Höhe jeder farbigen Säule entspricht der Höhe der dem Intervall zugehörigen Tonstufe.

[1] Als Obertöne bezeichnet man jene Töne, die beim Erklingen eines Grundtones durch Resonanz entstehen und deren Frequenzen ein ganzzahliges vielfaches der Frequenz des Grundtons haben. Der erste Oberton (Oktave) hat die doppelte Frequenz des Grundtons, der zweite Oberton (Quinte in der ersten Oberoktave) die dreifache Frequenz des Grundtons und so weiter. Die natürliche Folge der Obertöne bildet die sogenannte Obertonreihe.

[2] Als Teiltonreihe bezeichnet man die Summe Grundton + Obertonreihe. Der Grundton (Prime) ist der 1. Teilton der Teiltonreihe, der erste Oberton (Oktave = doppelte Frequenz) ist der 2. Teilton der Teiltonreihe, der zweite Oberton (Quinte in der ersten Oberoktave = dreifache Frequenz) ist der 3. Teilton der Teiltonreihe, und so weiter. Generell gilt: Ordnungszahl eines Teiltones gleich Ordnungszahl eines Obertones + 1.

Intervalle mit **zwei Grundformen** sind die **Sekunde**, die **Terz**, die **Sexte** und die **Septime**. Diese Intervalle können je nach Tonart in einer **kleinen** oder einer **großen** Variante vorkommen, z.B. gibt es eine kleine Terz (Mollterz) und eine große Terz (Durterz). In der europäischen Musiktradition werden die Intervalle mit zwei Grundformen aus den Verhältnissen abgeleitet, die von den Teiltönen mit den Ordnungszahlen 2 (Oktave), 3 (Quinte in der ersten Oberoktave) und 5 (große Terz in der zweiten Oberoktave) respektive deren Oktavtöne (4., 6., 8. und 10. Teilton) gebildet werden. Der 7. Teilton (Naturseptime in der zweiten Oberoktave) hingegen spielt in der traditionellen europäischen Musiktradition eine völlig untergeordnete Rolle.

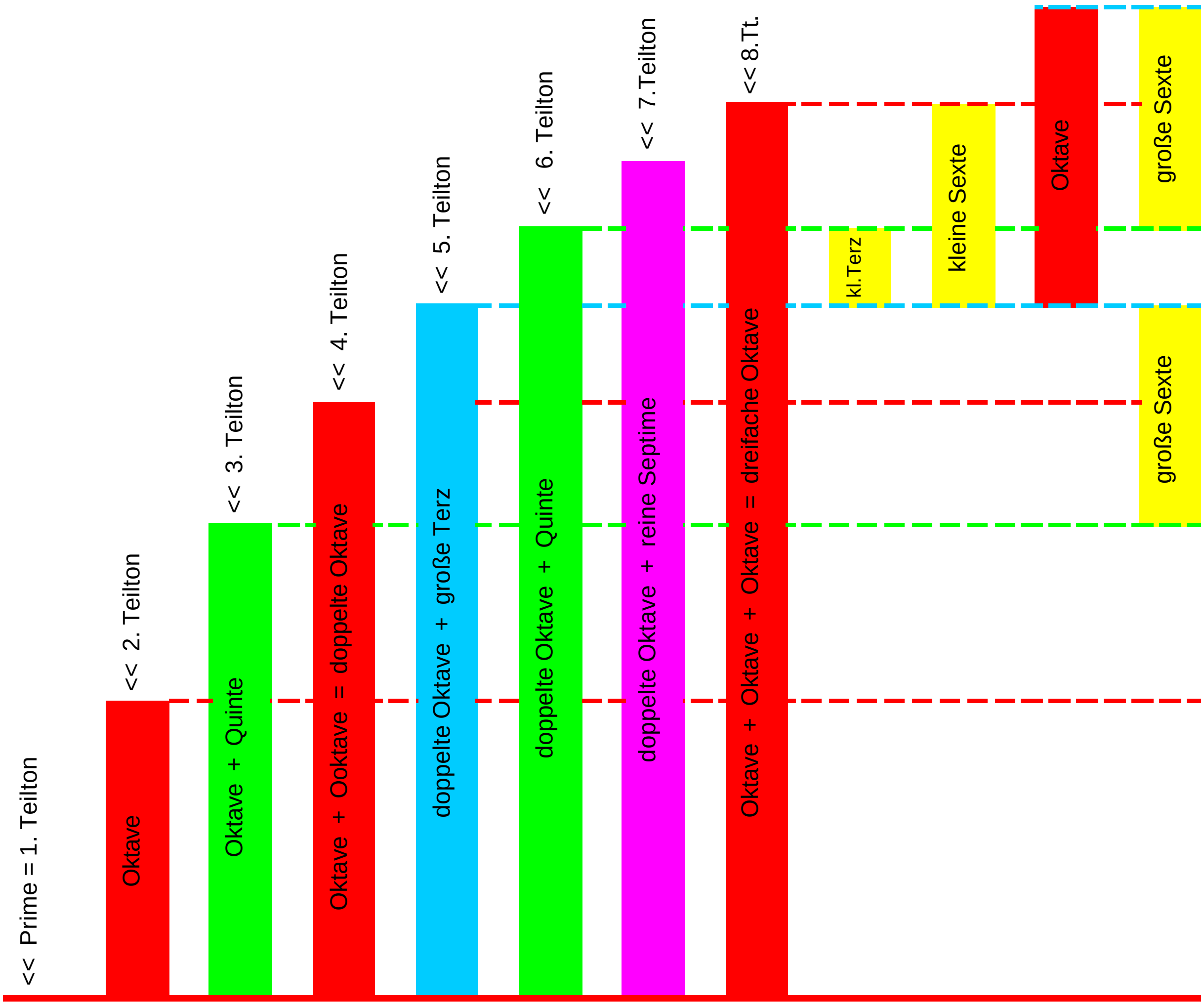



**Abb. 2** zeigt von links nach rechts zuerst der Reihe nach die ersten 8 Teiltöne der Teiltonreihe. Der Grundton (1. Teilton), die Oktave (2. Teilton) und die Oberoktaven (4. und 8. Teilton) sind in roter Farbe markiert. Die Quinte in der ersten Oberoktave (3. Teilton) und die Quinte in der zweiten Oberoktave (6. Teilton) sind in grüner Farbe markiert. Die große Terz in der zweiten Oberoktave (5. Teilton) ist in blauer Farbe markiert. Die Naturseptime in der zweiten Oberoktave ist in violetter Farbe markiert.

In gelber Farbe sind die Intervalle zwischen den Teiltönen markiert. Die kleine Terz ist das Intervall zwischen dem 5. und 6. Teilton respektive das Intervall zwischen großer Terz und Quinte. Die kleine Sexte ist das Intervall zwischen dem 5. und 8. Teilton respektive zwischen großer Terz und Oktave. Die große Sexte ist das Intervall zwischen dem 6. und 10 respektive zwischen dem 3. und 5. Teilton, also zwischen der Quinte und der großen Terz in der nächst höheren Oktave. Die große Sexte ist auch das Intervall zwischen einer kleinen Terz und einer Oktave.

Die Höhe jeder farbigen Säule entspricht der Höhe der dem Intervall zugehörigen Tonstufe.

Die Frequenzverhältnisse der Töne, die ein Intervall bilden, lassen sich direkt von der Teiltonreihe ableiten. Beispielsweise ist die große Terz das Intervall zwischen dem 4. und dem 5. Teilton, das Frequenzverhältnis beträgt somit 4 zu 5 respektive 1 zu 5/4 = 1,25.

Bei den reinen Intervallen (Prime, Quarte, Quinte und Oktave) als auch bei den Terzen und Sexten läßt sich die Zuordnung der Intervalle zu den Teiltönen logisch und klar ableiten. Bei den Sekunden (und entsprechend bei den Septimen) gibt es verschiedene Möglichkeiten der Zuordnung, die alle jeweils sowohl musikalisch als auch harmonikal in sich stimmig und logisch sind.

Der Abstand zwischen einer Quarte und einer Quinte entspricht dem Intervall, das von dem 8. und dem 9. Teilton gebildet wird. Dieses Intervall ist größer als dasjenige zwischen einer Quinte und einer großen Sexte, das dem Intervall zwischen dem 9. und dem 10. Teilton gleichkommt. Beide Intervalle sind große Sekunden, doch das erste ist ein großer Ganzton (pythagoreische große Sekunde) und das zweite ist ein kleiner Ganzton (diatonische große Sekunde). Ebenso ist der Halbtonschritt von der großen Terz zur Quarte größer als derjenige von der kleinen Terz zur großen Terz. Der größere Halbtonschritt wird großer Halbton (kleine Sekunde = diatonische kleine Sekunde) genannt, der kleinere Halbtonschritt wird kleiner Halbton (kleines Chroma = kleine übermäßige Prime) genannt. Die kleine Sekunde entspricht dem Intervall, das von dem 15. und dem 16. Teilton gebildet wird, das kleine Chroma dem Intervall, das von dem 24. und dem 25. Teilton gebildet wird.

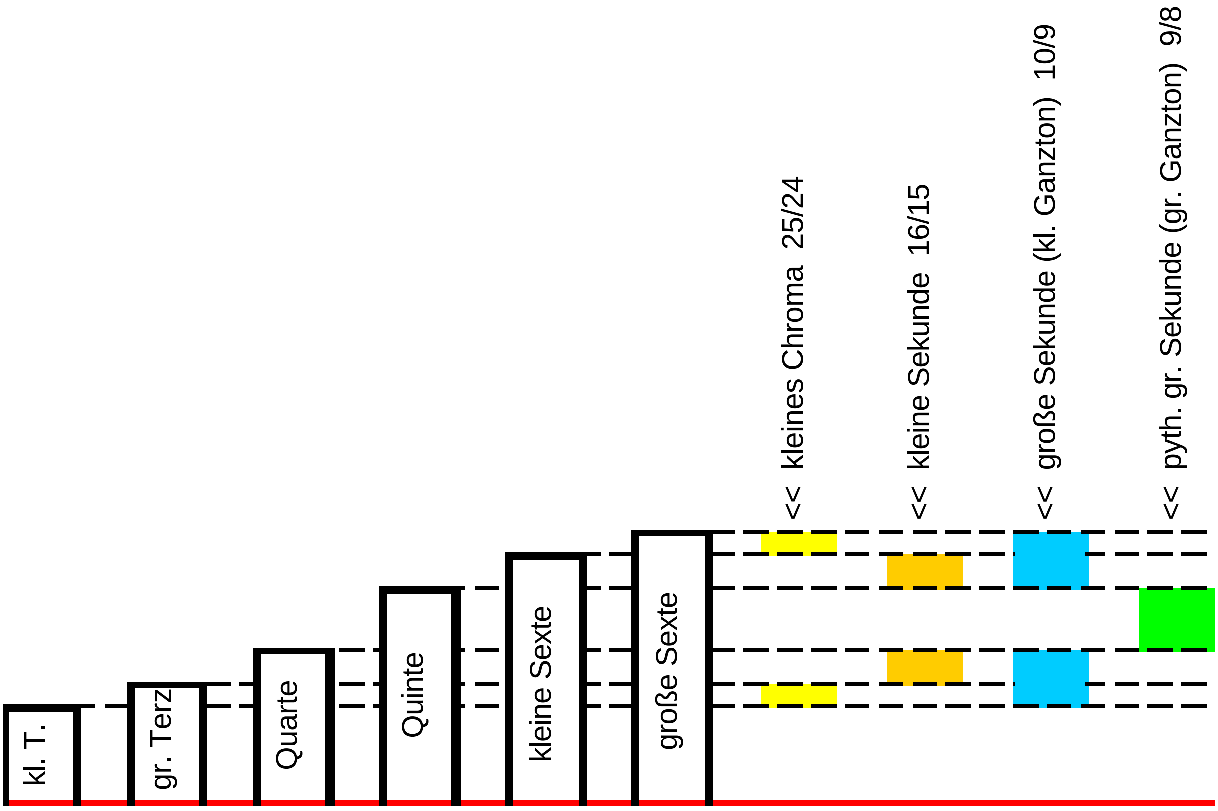



**Abb. 3** zeigt das Vorkommen der unterschiedlichen großen und kleinen Sekunden zwischen Terzen, Quarten, Quinten und Sexten. Der große Ganzton (pythagoreische große Sekunde) zwischen Quarte und Quinte ist in grüner Farbe dargestellt, der kleine Ganzton (große Sekunde = diatonische große Sekunde) zwischen kleiner Terz und Quarte respektive zwischen Quinte und großer Sexte ist in blauer Farbe dargestellt, der große Halbton (kleine Sekunde = diatonische kleine Sekunde) zwischen großer Terz und Quarte respektive zwischen Quinte und kleiner Sexte ist in bräunlicher Farbe dargestellt und der kleine Halbton (kleines Chroma = kleine übermäßige Prime) zwischen kleiner und großer Terz respektive zwischen kleiner und großer Sexte ist in gelber Farbe dargestellt.

Die Beobachtung der Schwingungsverhältnisse zwischen den Teiltönen der natürlichen Teiltonreihe zeigt, daß es nicht hinreichend und genügend ist, die Intervalle in reine Intervalle mit einer Grundform und natürliche Intervalle mit zwei Grundformen (klein und groß) einzuteilen, sondern daß man zur Beschreibung der Gegebenheiten die Einteilung weiter differenzieren muß. Deshalb gibt es neben den kleinen und großen Intervallen auch noch verminderte, übermäßige (wobei diese wiederum in große und kleinen Formen vorkommen) sowie doppelt verminderte und doppelt übermäßige Intervalle. Die Einteilung wird in folgender Struktur vorgenommen:

| | | | **Intervalle** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **mit einer Grundform** | | | |
| | | | **in Verbindung mit Quinten- und Terzenstimmung** | | | |
| | **verminderte Intervalle** | | **(reine Intervalle)** | | **übermäßige Intervalle** | |
| doppelt | große | kleine | Prime | kleine | große | doppelt |
| doppelt | große | kleine | Quarte | kleine | große | doppelt |
| doppelt | große | kleine | Quinte | kleine | große | doppelt |
| doppelt | große | kleine | Oktave | kleine | große | doppelt |
| | | | **mit zwei Grundformen** | | | |
| | | | **in Verbindung mit Quinten- und Terzenstimmung** | | | |
| | **verminderte Intervalle** | | **(natürliche Intervalle)** | | **übermäßige Intervalle** | |
| | große | kleine | kleine Sekunde | kleine | große | |
| | große | kleine | große Sekunde | kleine | große | |
| | große | kleine | kleine Terz | kleine | große | |
| | große | kleine | große Terz | kleine | große | |
| | große | kleine | kleine Sexte | kleine | große | |
| | große | kleine | große Sexte | kleine | große | |
| | große | kleine | kleine Septime | kleine | große | |
| | große | kleine | große Septime | kleine | große | |
| | | | **mit einer Grundform** | | | |
| | | | **in Verbindung mit reiner Quintenstimmung** | | | |
| | **verminderte Intervalle** | | **(pythago. Intervalle)** | | **übermäßige Intervalle** | |
| doppelt ver. | verminderte | | Prime | | übermäßige | doppelt üb. |
| doppelt ver. | verminderte | | Quarte | | übermäßige | doppelt üb. |
| doppelt ver. | verminderte | | Quinte | | übermäßige | doppelt üb. |
| doppelt ver. | verminderte | | Oktave | | übermäßige | doppelt üb. |
| | | | **mit zwei Grundformen** | | | |
| | | | **in Verbindung mit reiner Quintenstimmung** | | | |
| | | | **(pythagoreische Intervalle)** | | | |
| | verminderte | | pyth. kleine Sekunde | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. große Sekunde | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. kleine Terz | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. große Terz | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. kleine Sexte | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. große Sexte | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. kleine Septime | | übermäßige | doppelt üb. |
| | verminderte | | pyth. große Septime | | übermäßige | doppelt üb. |

**Abb. 4** zeigt die Struktur der Einteilung und Namensgebung der Intervalle, wie sie in der traditionellen europäischen Musiktradition überliefert und angewendet wird. Die genaue Bedeutung der einzelnen Bezeichnungen wird in den folgenden Abschnitten sukzessive erklärt und erläutert.

Die Prime (1. Teilton) und die Oktave (2. Teilton) sind die grundlegende Intervalle für nahezu alle Tonleitersysteme. Die Quinte (Verhältnis vom 2. zum 3. Teilton) und die Quarte (Verhältnis vom 3. zum 4. Teilton) sowie das Intervall, das zwischen Quarte und Quinte liegt, der Ganzton (Verhältnis vom 8. zum 9. Teilton) sind integraler Bestandteil sowohl des natürlichen Stimmungssystems als auch des pythagoreischen Stimmungssystems. Ab dem 5. Teilton beginnen sich diese beiden Stimmungssysteme zu unterscheiden. Das Verhältnis vom 4. zum 5. Teilton (natürliche große Terz) kommt im pythagoreischen Stimmungssystem nicht mehr vor, ebenso auch nicht die natürliche kleine Terz (Verhältnis vom 5. zum 6. Teilton), die natürliche große Sexte Verhältnis vom 3. zum 5. Teilton, die natürliche kleine Sexte (Verhältnis vom 5. zum 8. Teilton), die natürliche große Sekunde (kleiner Ganzton, Verhältnis zwischen dem 9. und 10. Teilton) als auch die natürliche kleine Sekunde (diatonischer Halbton). Entsprechendes gilt ebenso auch für die Ergänzungsintervalle der natürlichen kleinen und der natürlichen großen Sekunde – der natürlichen großen und der natürlichen kleinen Septime (natürliche große Septime = Verhältnis zwischen dem 8. und dem 15. Teilton; natürliche kleine Septime = Verhältnis zwischen dem 5. und 9. Teilton).

Die Intervalle zwischen den einzelnen Tonstufen, die den Intervallen, die aus der Teiltonreihe gebildet werden können, zugeordnet werden, haben recht unterschiedliche Größen, wie die folgende Abbildung zeigt.

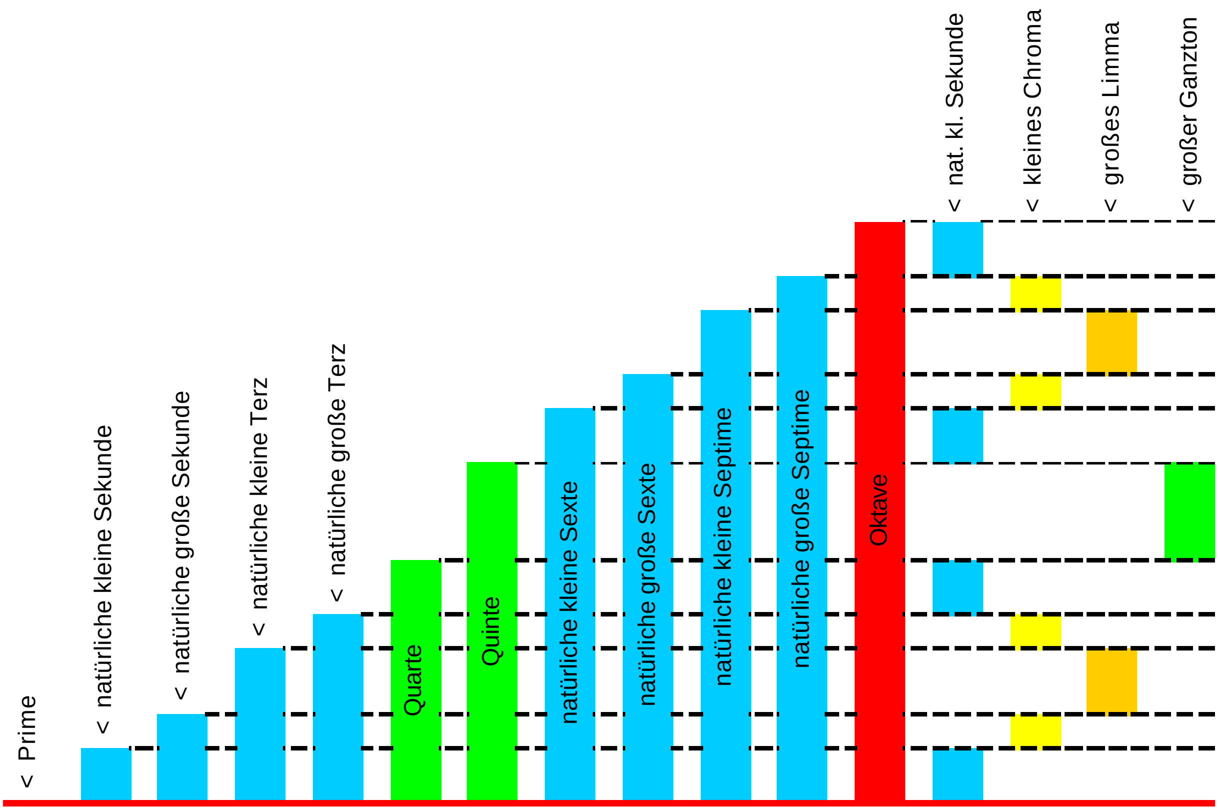



**Abb. 5** zeigt die drei verschiedenen Halbtonschritte, die sich aus den grundlegenden Intervallen ergeben. Die natürliche kleine Sekunde (diatonischer Halbton) mit den Frequenzverhältnis 15 zu 16 respektive von 1 zu 16/15 ist auch das Intervall zwischen der natürlichen großen Terz und der Quarte, zwischen der Quinte und der natürlichen kleinen Sexte sowie zwischen der natürlichen großen Septime und der Oktave. Das kleine Chroma (kleine übermäßige Prime mit dem Frequenzverhältnis von 24 zu 25 respektive von 1 zu 25/24) ist das Intervall zwischen den natürlichen kleinen und großen Sekunden, Terzen, Sexten und Septimen. Das große Limma mit dem Frequenzverrhältnis von 25 zu 27 respektive von 1 zu 27/25 ist das Intervall zwischen der natürlichen großen Sekunde und der natürlichen kleinen Terz sowie zwischen der natürlichen großen Sexte und der natürlichen kleinen Septime.

Auch die Intervalle zwischen den Tonstufen, die den Ganztönen entsprechen, haben unterschiedliche Größen, wie die folgende Abbildung zeigt.

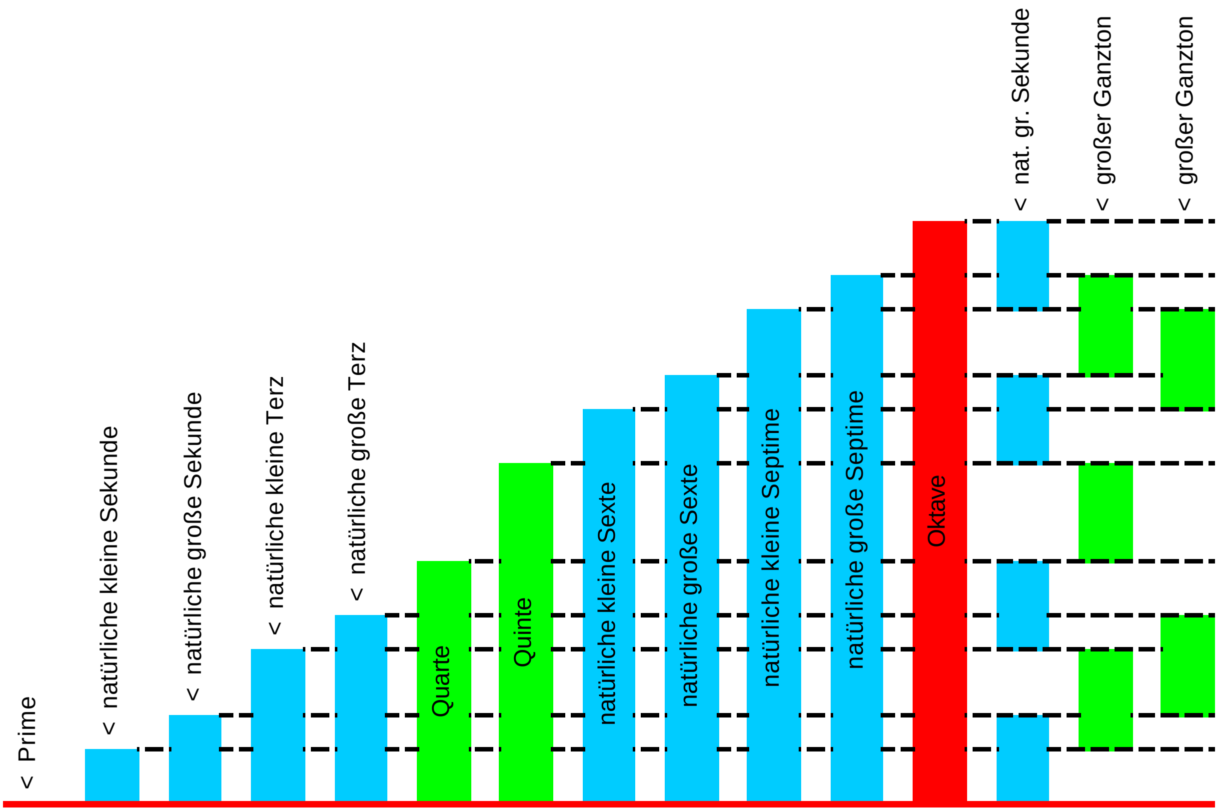



**Abb. 6** zeigt die zwei verschiedenen Ganztonschritte, die sich aus den grundlegenden Intervallen ergeben. Die natürliche große Sekunde mit den Frequenzverhältnis 9 zu 10 respektive von 1 zu 10/9 ist auch das Intervall zwischen der natürlichen kleinen Terz und der Quarte, zwischen der Quinte und der natürlichen großen Sexte sowie zwischen der natürlichen kleinen Septime und der Oktave. Das große Ganzton (pythagoreische große Sekunde mit dem Frequenzverhältnis von 8 zu 9 respektive von 1 zu 9/8) ist das Intervall zwischen der natürlichen kleinen Sekunde und der natürlichen kleinen Terz, der natürlichen großen Sekunde und der natürlichen großen Terz, der Quarte und der Quinte, der natürlichen kleinen Sexte und der natürlichen kleinen Septime als auch der natürlichen großen Sexte und der natürlichen großen Septime.

Die Tatsache, daß diese Intervalle, als auch dadurch bedingt alle weiteren Intervalle (mit Ausnahme der Prime und der Oktave im allgemeinen) verschiedene Größen haben, führt dazu, daß Akkorde oder Melodien von Tonstufe zu Tonstufe nicht nur von der Höhe unterschiedlich sind, sondern auch von der Klangstruktur oder Klangcharakteristik her hörbar signifikante Unterschiede aufweisen. Deshalb gibt es zahlreiche Techniken (Methoden) in der Stimmkunst, diese Unterschiede auszugleichen, um Tonleitern zu erhalten, bei denen von Tonstufe zu Tonstufe gleichartige Akkorde gebildet werden können, damit man von einer Tonart in eine andere Tonart frei modulieren kann. Beispiele hierfür sind die wohltemperierten mitteltönigen Stimmungen (auch chromatische Stimmungen genannt) oder die sogenannte gleichschwebende (gleichmäßige) Temperatur (heutige Standard- und Normstimmung).

In den folgenden Abschnitten sind diese Stimmungssysteme näher beschrieben, obwohl sie eigentlich für den Klang der Wasserstoffmoleküle nicht relevant sind. Die Schwingungszahlen des Wasserstoff-spektrums sind in reinen natürlichen Schwingungsverhältnissen zueinander gestimmt.

## 1.1 Intervalle – Oktaven

**Oktave** ist die musikalisch-fachsprachliche Bezeichnung für den achten Ton der diatonischen Tonleiter vom Grundton an. Die Oktave ist das musikalische Intervall, das am leichtesten nach dem Ohr gestimmt werden kann.

In nahezu allen Musikkulturen der Welt werden Tonleitern zwischen einem Grundton und der Oktave zu diesem Grundton definiert. In der nächst höheren Oktave wiederholen sich die gleichen Intervalle wie in der Grundoktave. Auch die Tonnamen wiederholen sich von Oktave zu Oktave.

| | |
|---|---|
| Grundoktave: | C D E F G A H c |
| 1. Oberoktave: | c d e f g a h c‘ |
| 2. Oberoktave: | c‘ d‘ e‘ f‘ g‘ a‘ h‘ c‘‘ |
| 3. Oberoktave: | c‘‘ d‘‘ e‘‘ f‘‘ g‘‘ a‘‘ h‘‘ c‘‘‘ |

Die (aufsteigende) Oktave hat die doppelte Frequenz des Grundtones, die Bioktave (doppelte Oktave) hat die vierfache Frequenz des Grundtones, die Trioktave (nächst höhere Oktave) hat die achtfache Frequenz des Grundtones, und so weiter. Absteigende Oktaven (Unteroktaven) haben der Reihe nach die halbe Frequenz, ein Viertel der Frequenz, ein Achtel der Frequenz des Grundtones (und so weiter).

Auf dem Klavier ist das **mittlere c** das **eingestrichene c** (**c‘**). Das **darüberliegende c** wird **c“** (**zweigestrichenes c**) genannt. Das **c**, das **unter dem mittleren c** (**c‘**) liegt, ist das sogenannte **kleine c**. Eine **Oktave tiefer** liegt dann das **große C**. Höhere Oktaven werden mit zusätzlichen Strichen nach kleinen Buchstaben (Tonnamen) gekennzeichnet, tiefere Oktave mit großen Buchstaben, die einfach oder auch mehrfach unterstrichen sind.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Frequenzen von Grundton und von mehreren Oktaven für ein sogenanntes „Sekunden-C“ angegeben. Ausgangspunkt dieses von den Anthroposophen (Fanclub von Rudolf Steiner) propagierte C ist die Zeitdauer einer Sekunde. Die Idee, die Zeiteinheit Sekunde als Maßstab für die Bestimmung der Tonhöhe zu wählen, stammt von dem Komponisten und Musiker Paul Hindemith. Die Maßzahlen der Frequenzen der Töne „C“ sind somit stets Potenzen der Zahl Zwei: 16 Hz, 32 Hz, 64 Hz, 128 Hz, 256 Hz, 512 Hz, 1.024 Hz, und so weiter.

| **Tonbezeichnung** | **Frequenz** |
|---|---:|
| Grundton: $\underline{\underline{C}}$ | 16 Hz |
| Oktave: $\underline{C}$ | 32 Hz |
| Bioktave: C | 64 Hz |
| Trioktave: c | 128 Hz |
| vierte Oktave: c‘ | 256 Hz |
| fünfte Oktave: c‘‘ | 512 Hz |
| sechste Oktave: c‘‘‘ | 1.024 Hz |
| siebte Oktave: c‘‘‘‘ | 2.048 Hz |
| achte Oktave: c‘‘‘‘‘ | 4.096 Hz |

### 1.1.1 Die logarithmische Darstellung der Intervalle

Der seit dem 17. Jahrhundert gebräuchliche mathematische Fachausdruck *Logarithmus* ist eine Wortprägung des schottischen Mathematikers John Napier (1550-1617) und ist dem griechischen Begriff *logos „Wort, Rechnung, Verhältnis“* und dem ebenfalls griechischen *arithmos „Zahl“* entlehnt.

Ein Logarithmus ist eine Zahl (ein Exponent), mit der man eine andere Zahl (die Basis) potenzieren muß, um eine vorgegebene dritte Zahl (den Numerus) zu erhalten. So ist der Logarithmus zur Basis 10 von 100 (vom Numerus 100) die Zahl (der Exponent) 2, da $10^2 = 100$. Von der Zahl (vom Numerus) 1000 ist der Logarithmus zur Basis 10 gleich 3, da die 3. Potenz von 10 gleich 1000 ist, oder in mathematischer Schreibweise: $10^3 = 1000$. Diese Art von Logarithmen nennt man dekadische Logarithmen, denn sie zeigen an, mit welcher Zahl (mit welchem Exponenten) die Zahl 10 zu potenzieren ist, um den Numerus zu erhalten. Die ersten dekadischen Logarithmentafeln schuf der englische Mathematiker Henry Briggs (1565-1630). Darum nennt man die dekadischen Logarithmen auch *Briggssche Logarithmen.* Die Kurzform (Kurzschreibweise) für dekadischer Logarithmus ist *log*.

Der Basler Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) war ein genialer und führender Wissenschaftler auf allen Gebieten der Mathematik, der theoretischen Physik, der Astronomie und der Musiktheorie. Nach ihm ist die von ihm entdeckte und berechnete Zahl „e“ benannt. Diese sogenannte *Eulersche Zahl* (2,718 281 829) bildet die Grundlage der sogenannten natürlichen Logarithmen, Kurzform *ln*. In den reinen Naturwissenschaften und in der Mathematik spielen die natürlichen Logarithmen eine sehr wichtige Rolle. Natürliche Logarithmen haben die transzendente Zahl „e“ zur Basis. Für diese Logarithmen gilt die Reihe (wobei x eine beliebige positive Zahl kleiner oder gleich 1 darstellt):

$$\ln (1 + x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + x^7/7 - x^8/8 + x^9/9 \ldots$$

Der Logarithmus einer Zahl y zur Basis g wird dann wie folgt berechnet:

$$\ln y / \ln g = \log g_y$$

(Logarithmus naturalis von y geteilt durch Logarithmus naturalis von g ist gleich dem Logarithmus von y zur Basis g). Für musikalische Betrachtungen ist die Wahl der Zahl 2 für die Basis g naheliegend, da die reine Oktave die zweifache Frequenz des Grundtones hat. Logarithmen zur Basis 2 nennt man auch *dyadische Logarithmen*, im Volksmund auch „Zweierlogarithmus“ genannt. Die Abkürzung ist $l_d$. Es gilt somit:

$$\ln y / \ln 2 = l_d\, y$$

In seinem *Tentamen novae theoriae musicae* (Kapitel VII) beschreibt Leonhard Euler den Entwurf einer Kompositionslehre auf Grundlage der *„vera principiae harmoniae“ – „die wahren Prinzipien der Harmonie“* unter der Überschrift *„De variorum intervallorum receptis appellationibus“ – „Über angenommene Namen verschiedener Intervalle“.* Darin wird eine ausführliche Definition und Logarithmierung der Intervalle aufgeführt. Das Teilungsverhältnis der Intervalle wird als *„ratio sonorum“– „Klangverhältnis“* bezeichnet, die Logarithmen zur Basis 2 als *„mensura“*. Diese Logarithmen zur Veranschaulichung der Intervallgrößen werden hier zum ersten Mal in der Musiktheorie eingeführt. Leonhard Euler veröffentlichte das Werk *„Tentamen novae theoriae musicae ...“* im Jahre 1739 in Sankt Petersburg. Aus einem Brief vom 25. Mai 1731 an seinen Lehrer, dem Basler Mathematikprofessor Johann Bernoulli (1667-1748), geht jedoch hervor, daß das Werk bereits acht Jahre vor seiner Veröffentlichung fertiggestellt war. In diesem Brief beschreibt Euler das Leitmotiv zu seinem Werk:

*„Mein Endzweck in diesem Werke war dieser, daß ich suchte die Musik als einen Teil der Mathematik auszuführen, und alles was eine Zusammenfügung und Vermischung der Töne kann angenehm machen, aus richtigen Gründen ordentlich herzuleiten.“*

Euler veröffentlichte diese Logarithmen in Tabellenform wie folgt:[3]

| ***Nomina intervallorum*** | ***Ratio sonorum*** | ***Mensura*** | ***Gradus suavitatis*** |
|---|---|---|---|
| *Diaschisma* | *2.048 : 2.025* | *0,016 295* | *28* |
| *Comma* | *81 : 80* | *0,017 920* | *17* |
| *Diesis* | *128 : 125* | *0,034216* | *20* |
| *Hemitonium minus* | *25 : 24* | *0,058 894* | *16* |
| *Limma minus* | *135 : 128* | *0,076 814* | *18* |
| *Hemitonium maius* | *16 : 15* | *0,093 110* | *11* |
| *Limma maius* | *27 : 25* | *0,111 030* | *15* |
| *Tonus minor* | *10 : 9* | *0,152 004* | *10* |
| *Tonus maior* | *9 : 8* | *0,169 924* | *8* |
| *[...]* | | | |
| *Octave* | *2 : 1* | *1,000 000* | *2* |

### 1.1.2 Centwerte

Heutzutage wird im allgemeinen zur Beschreibung eines Intervalls in der Musikwissenschaft die Einteilung in *Cent* gebraucht. Der Begriff *Cent* geht auf den englischen Phonetiker Alexander John Ellis (1814-1890) zurück. Dabei wird die ganze Oktave in 1.200 Cent, der gleichstufige (gleichmäßige) Halbtonschritt in 100 Cent eingeteilt.

Ein Cent ist genau 1.200 mal größer als der entsprechende dyadische Logarithmus. Die Definition des Cent in der Musikwissenschaft ist somit:

$$1 \text{ Cent} = 2^{(1/1.200)} = 1{,}000\ 577\ 79.\ \ldots$$

Ein Cent ist somit die Zahl, die 1.200 Mal mit sich selbst multipliziert die Zahl 2 ergibt. Ein Cent ist die 1.200. Wurzel aus 2.

Der Centwert eines Intervalls kann aus dem Intervallfrequenzverhältnis wie folgt berechnet werden:

$$(\ln \text{Intervallfrequenzverhältnis} / \ln 2) \times 1.200 = \text{Centwert des Intervalls}$$

3 *Nomina intervallorum* = Intervallnamen; *Ratio sonorum* = Klangverhältnis (Frequenzverhältnis); *Mensura* = Maß (Unter *Mensura* sind die Logarithmen zur Basis 2 verstanden, die hier erstmals in der Musiktheorie eingeführt wurden); *Gradus suavitatis* = Grad der Annehmlichkeit, Grad der Lieblichkeit (Skala zu Unterscheidung von Konsonanz und Dissonanz).

In der folgenden Tabelle sind in der ersten Spalte die Intervallnamen angegeben, in der 2. Spalte die Intervallfaktoren, in der 3. Spalte die dyadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 2) und in der 4. Spalte die Centwerte (dyadische Logarithmen x 1.200). Die Werte in Spalte 3 entsprechen den Angaben, die Euler in seinem „*Tentamen*“ als „*Mensura*“ bezeichnete. Zur Unterscheidung der Größe der Intervalle sind die Angaben in Cent am besten geeignet.

| Intervallname | Intervallfaktor | dyadischer Log. | Centwert |
|---|---|---|---|
| Kleines Chroma | 25/24 | 0,058894 | 70,67 |
| Natürliche kleine Sekunde | 16/15 | 0,093109 | 111,73 |
| Großes Limma | 27/25 | 0,111031 | 133,24 |
| Natürliche große Sekunde | 10/9 | 0,152003 | 182,40 |
| Pythagoreische große Sekunde | 9/8 | 0,169925 | 203,91 |
| Natürliche kleine Terz | 6/5 | 0,263034 | 315,64 |
| Natürliche große Terz | 5/4 | 0,321928 | 386,31 |
| Quarte | 4/3 | 0,415037 | 498,04 |
| Quinte | 3/2 | 0,584963 | 701,96 |
| Natürliche kleine Sexte | 8/5 | 0,678072 | 813,69 |
| Natürliche große Sexte | 5/3 | 0,736966 | 884,36 |
| Natürliche kleine Septime | 9/5 | 0,847997 | 1.017,60 |
| Natürliche große Septime | 15/8 | 0,906891 | 1.088,27 |
| Oktave | 2/1 | 1,000000 | 1.200,00 |

An den Centwerten kann man sofort leicht die Größe eines Intervalls erkennen. Das kleine Chroma ist beispielsweise mehr als 40 Cent kleiner als eine natürliche kleine Sekunde oder der pythagoreische Ganzton (pythagoreische große Sekunde) ist um mehr als 20 Cent größer als die natürliche große Sekunde. In den Abbildungen 1 bis 6 wie auch in den folgenden Abbildungen sind die Größen der Intervalle (Höhen der farbigen Felder) analog zu deren Centwerte wiedergegeben.

Die Centwerte sind Größenangaben, die unabhängig von der Ausgangsfrequenz des Grundtons wie auch von der Oktavlage sind. Eine natürliche große Terz umfaßt immer 386,31 Cent, egal in welcher Oktave diese Terz vorkommt.

### 1.1.3 Schwebungen als Maßgabe für die Stimmreinheit

Sind zwei Töne fast, jedoch nicht ganz gleich hoch (oder tief) eingestimmt, so klingen sie miteinander wie ein einziger Ton, der langsam abwechslungsweise lauter und leiser wird. Dies kommt von der Überlagerung der einander sehr ähnlichen Schwingungen. Je langsamer die Schwebung ist, desto genauer sind die Töne in Übereinstimmung.

Erklingt zum Beispiel ein c mit 128 Hz und ein zweites c mit 129 Hz, so hört man ein mittleres c von 128,5 Hz, das einmal pro Sekunde schwebt (lauter und leiser wird). Auf Grund der Schwebungszahl kann genau gehört werden, wie präzise die Frequenzen der beiden Töne Übereinstimmen. Eine Schwebung pro Sekunde bedeutet ein Hertz Frequenzunterschied. Die Oktavtöne (2. Teiltöne) von einem c mit 128 Hz respektive von einem c mit 129 Hz erklingen mit 256 Hz respektive 258 Hz. Diese Oktavtöne haben die doppelte Schwebungszahl im Vergleich zu den beiden Grundtönen. In der nächst höheren Oktave (4. Teiltöne) hört man dann 4 Schwebungen pro Sekunde, da diese mit 512 Hz respektive mit 516 Hz (4 Hz Differenz) erklingen.

Auf Grund dieser Tatsache ist es sinnvoll, wenn man zwei Saiten eines Instrumentes auf den gleichen Ton einstimmen will, jeweils auch die Hälfte der Saiten respektive die Viertel der Saiten als Flageolett-töne erklingen zu lassen, um dann die Schwebungen präziser zu hören als bei den Grundtönen.

Auch beim Einstimmen von Oktaven empfiehlt es sich, die Flageolett-Töne zu vergleichen, das heißt die doppelte Oktave des Grundtons (1/4 der Saite) mit der Oktave des Oktavtons (1/2 der Saite). Wenn diese schwebungsfrei erklingen, dann ist die Oktave richtig gestimmt. Prime und Oktave sind die am einfachsten zu stimmende Intervalle.

### 1.1.4 Zusammenfassung

Das Frequenzverhältnis von einer Oktave zur nächsten Oktave beträgt 1 zu 2, das heißt, die Frequenz verdoppelt sich von Oktave zu Oktave. Auch die Schwebungszahlen verdoppeln sich von Oktave zu Oktave. Die Frequenzen folgen einer exponentiellen Funktion: $2^n$ (1, 2, 4, 8,16, 32, 54, 128, usw.).

Die Oktave umfaßt genau 1.200 Cent, zwei Oktaven 2.400 Cent, drei Oktaven 3.600 Cent, usw. Mit jeder Oktave nimmt die Centzahl um 1.200 zu. Die Centwerte entsprechen im Tonsystem somit einer linearen Funktion. Aus der Perspektive der Frequenzen folgen die Frequenzen einer logarithmischen Funktion: [ln (Frequenzverhältnis) / ln (2)] x 1.200 = Centwert.

Eine ganze Saite erklingt in ihrem Grundton. Die halbe Saite führt dann zum Oktavton, ein Viertel der Saite zur doppelten Oktave (Bioktave), ein Achtel der Saite zur darüberliegenden Trioktave, usw. Die Saitenteilungen entsprechen einer reziprok (umgekehrt proportionalen) exponentiellen Funktion. $2^{-n}$ ($2^{-n}$ = 1, ½, ¼, 1/8, 1/16, usw. für n = 0, 1, 2, 3, 4, usw.)

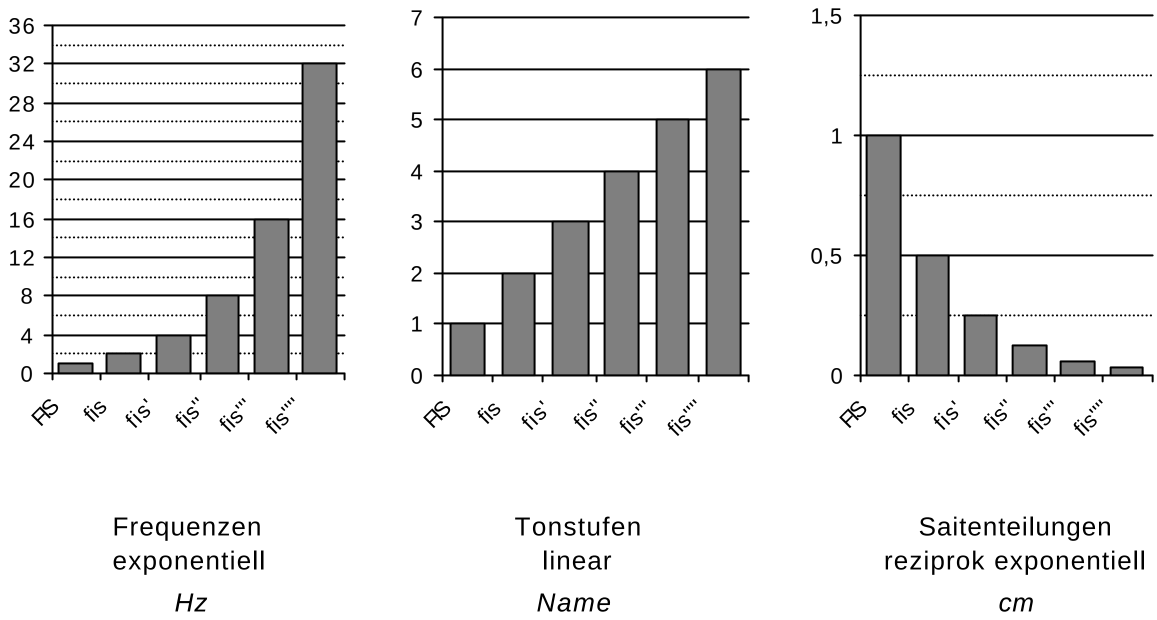



**Abb. 7** zeigt die unterschiedlichen Funktionen, denen Frequenzen, Tonstufen und Saitenteilungen von Oktave zu Oktave Folgen. Die Frequenzzahlen nehmen exponentiell zu, die Tonstufen nehmen linear zu und die Saiten-teilungen nehmen reziprok exponentiell ab. Beispielhaft für den Klang des Wasserstoffmoleküls ist hier der Ton FIS der Rydberg-Konstante in verschiedenen Oktaven angegeben.

## 1.2 Intervalle – Quinten

Die Quinte ist das Intervall, das zwischen dem 2. Teilton (Oktave) und dem 3. Teilton (Quinte in der ersten Oberoktave) gebildet wird. Nach dem Einstimmen von Primen und Oktaven ist das Einstimmen von Quinten einerseits die leichteste Stimmübung und andererseits die erste Stimmübung, die zu neuen Tonstufen mit neuen Tonnamen führt.

### 1.2.1 Quinte, Quarte und der große Ganzton

Die Quinte, der fünfte Ton der diatonischen Tonleiter, erklingt in der ersten Oberoktave von einem C aus als 3. Teilton (g) und teilt die erste Oberoktave (c – c‘) in zwei Intervalle (c - g und g – c‘). Vom Oktavton aus wird somit die Quinte (c - g) gebildet und zwischen der Quinte und der Bioktave entsteht das Intervall der Quarte (g – c‘). In der nächsten Oberoktave (c‘ – c‘‘) führt der 6. Teilton (g‘) zur Quinte über dem c‘ und vom g‘ zum c‘‘ ist wiederum das Intervall einer Quarte gegeben. Ausgehend von einem C mit 64 Hz haben die Töne c, g, c‘, g‘ und c‘‘ die folgenden Frequenzen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Grundton: | C | 1. Teilton | Frequenz: | 64 Hz |
| Oktave: | c | 2. Teilton | Frequenz: | 128 Hz |
| Oktave + Quinte: | g | 3. Teilton | Frequenz: | 192 Hz |
| Bioktave: | c‘ | 4. Teilton | Frequenz: | 256 Hz |
| Bioktave + Quinte: | g‘ | 6. Teilton | Frequenz: | 384 Hz |
| Trioktave: | c‘‘ | 8. Teilton | Frequenz: | 512 Hz |

Die Quarte ist der vierte Ton der diatonischen Tonleiter. Der Ton der Quarte erscheint nicht direkt in der Obertonreihe, denn vom c aus ist der Quartton das f. Das f liegt genau eine Quinte unter dem c'.

Der große Ganzton, auch pythagoreischer Ganzton genannt, ist das Intervall, das zwischen der Quarte (f) und der Quinte (g) liegt. Der große Ganzton erklingt auch als 9. Teilton über der Trioktave (8. Teilton) als Ton d‘‘.

Die Quinte, respektive die Duodezime (Quinte in der ersten Oberoktave) ist, wie bereits erwähnt, nach der Prime und der Oktave das Intervall, das am leichtesten genau eingestimmt werden kann. Der dritte Teilton (2. Oberton) eines Grundtones und der zweite Teilton (1. Oberton) der darüberliegenden Quinte sind identisch. Hört man nun beim Erklingen einer Quinte ein Schweben, so kann genau festgestellt werden, wie genau, respektive ungenau, der Quintton eingestimmt wurde.

Die folgende Tabelle zeigt die Frequenzen von Grundton und Quinte, wie auch die der dazugehörigen Obertöne. In der rechten Spalte sind die Frequenzen einer unstimmigen Quinte in *kursiv* angegeben.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prime | c | 128 Hz | | | | |
| Oktave | c‘ | 256 Hz | Quinte | g | 192 Hz | *193 Hz* |
| Duodezime | g‘ | 384 Hz | Oktave der Quinte | g‘ | 384 Hz | *386 Hz* |
| Differenz | | | | | 0 Hz | *2 Hz* |

Die Quinte mit 192 Hz hat genau die 1,5-fache Frequenz des Grundtons. Der 3. Teilton des Grundtons und der 2. Teilton der Quinte stimmen genau überein. Die Quinte mit 193 Hz ist um 1,00 Hz zu hoch eingestimmt. Der 2. Teilton dieser Quinte schwingt mit 386 Hz, die Schwebungsfrequenz beträgt somit 2,00 Hz. Man muß also die Quinte um ein Hz tiefer stimmen, damit man keine Schwebung mehr hören kann. Die Schwebungszahl (die Frequenz des An- und Abschwellens der Lautstärke), die durch die Verstimmung einer Quinte hervorgerufen wird, ist doppelt so groß wie die Verstimmung selbst.

Da die Quinte und die Quarte sich zu einer Oktave ergänzen, werden Quarten gestimmt, indem man die Quinte unter dem Grundton einstimmt (vom c aus das F), um dann von diesem Ton eine Oktave hochzugehen (von F nach f). Die Duodezime der Abwärts-Quinte hat die gleiche Frequenz wie die Oktave des Ausgangstons.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Quinte abwärts | F | 85,33 Hz |
| Prime | c | 128 Hz | Oktave | f | 170,67 Hz |
| Oktave | c‘ | 256 Hz | Duodezime | c‘ | 256,00 Hz |

### 1.2.2 Die Begriffe diatonisch, chromatisch und enharmonisch

Die heutzutage im abendländischen Kulturkreis allgemein gebräuchliche Stimmung nennt man im Volksmund „*chromatische*“ Stimmung. Der Begriff chromatisch geht auf das lateinische Wort *chromaticus*, griechisch *chromatikos* zurück, das zu griechisch *chroma* „Farbe, Klangfarbe“ gehört. Der Begriff *chromatisch* bezeichnet somit eigentlich die Veränderung der Klangfärbung der sieben Grundtöne, die durch kleine Versetzungen der Tonstufenhöhen nach oben und nach unten erzielt wird. Eine chromatische Stimmung ist eine „verfärbte“ Stimmung.

Zumeist wird der Begriff *chromatisch* als Gegensatz zu *diatonisch* gebraucht. Diatonisch geht auf das griechische Wort *diatonos* zurück und bedeutet „auseinandergespannt, hindurchgespannt“. Das „diatonische Tongeschlecht“ basierte ursprünglich auf dem diatonischen Tetrachord (*Tetrachord* = Reihe von vier Tönen; *tetra* = vier; *chorde* = Darmsaite). Ein Tetrachord hatte in der Antike immer den Umfang einer reinen Quarte. Im Inneren des Tetrachordes waren zwei Töne angesiedelt, deren Lage innerhalb des Tetrachorde das Tongeschlecht ausmachten. Obwohl die Griechen in der Oktave die vollkommene Harmonie sahen, faßten sie den Oktavraum als etwas Zusammengesetztes auf. Er bestand für sie aus zwei Tetrachorden, die einander vollkommen gleich waren und durch einen Ganzton voneinander getrennt waren. Die Tonstufen wurden von oben nach unten betrachtet. Der erste Ton des Tetrachordes, respektive der Oktave, war stets der oberste Ton.

Der diatonische Tetrachord entsprach dem *dorischen* Tongeschlecht und ist mit unserer heutigen Dur-Tonleiter verwandt. Darum bezeichnet man auch heute noch häufig die reine natürliche Dur-Stimmung als diatonische Stimmung. Die Tonfolge des diatonischen Tetrachordes war:

**Diatonischer dorischer Tetrachord**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | | **G** | | **F** | | **E** |
| | **– Ganzton** | | **– Ganzton** | | **– Halbton** | |

Zwei um einen Ganzton getrennte diatonische Tetrachorde füllten somit die Oktave als dorische Tonleiter (Ganzton = GT, Halbton = HT):

**Diatonische dorische Tonleiter**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **e** | | **d** | | **c** | | **H** | | **A** | | **G** | | **F** | | **E** |
| | **– GT** | | **– GT** | | **– HT** | | **– GT** | | **– GT** | | **– GT** | | **– HT** | |

Ausgehend von dieser *dorischen* Grundskala leiteten die Griechen dann die verschiedenen Tonarten oder Oktavgattungen ab. Außer der *dorischen* Tonart spielten noch die *phrygische* und *lydische* eine zentrale Rolle.

Liest man die *dorische* Tonleiter vom „C“ an aufwärts, erhalten wir die heutige *C-Dur Stimmung*:

**C-Dur Stimmung**

**C D E F G A H c**

**+ GT + GT + HT + GT + GT + GT + HT**

Die altgriechische Oktavgattung des diatonisch dorischen Tongeschlechts entspricht weitgehend auch den heutigen Vorstellungen von antiken und klassischen Tonleitersystemen. Weniger bekannt ist, was in der Antike unter chromatischer Stimmung empfunden wurde. Seit der Zeit von Aristoxenos von Tarent (ca. 300 v. Chr.) nimmt die griechische Musiktheorie für die Erklärung der Tongeschlechter ihren Ausgangspunkt von dem diatonischen, dorischen Tetrachord.

Innerhalb des Tetrachordes wurden nunmehr nicht nur zwei diatonische Tonstufen definiert, sondern deren vier, die den Tetrachord in 5 Halbtöne aufteilten. Der oberste und unterste Ton des Tetrachordes waren fest, also unveränderlich. So konnte sich die chromatische Alteration nur innerhalb des Tetrachordes vollziehen und, da die Kithara (antikes Saiteninstrument) für jeden Tetrachord nur über vier Saiten verfügte, konnten nur zwei Töne im Rahmen des Tetrachordes gespielt werden. Die klassische *chromatische dorische* Skala hatte oben einen Anderthalbtonschritt, dem zwei Halbtonschritte folgten.

**Chromatischer dorischer Tetrachord**

**A Ges F E**

**– Anderthalbton – Halbton – Halbton**

**Die ganze chromatische dorische Skala bestand somit aus der Tonfolge:**

**e des c H A Ges F E**

Unter *enharmonisch* versteht man heutzutage Töne, respektive Akkorde, mit (annähernd) gleichem Klang, jedoch verschiedener Notierung, so zum Beispiel Cis = Des. In der Antike verstand man unter Enharmonik eine Stimmung, die Vierteltöne enthielt. Die Vierteltonstufen (Diesis) wurden durch die Differenzen der Tonhöhen von drei großen Terzen zur Oktave (kleine Diesis) und von vier kleinen Terzen zur Oktave (große Diesis) bestimmt.

Der enharmonische Tetrachord setzte sich aus einem Zweitonschritt und zwei Vierteltonschritte zusammen, wobei der Zweitonschritt oben angesiedelt war, die Vierteltonschritte folgten nacheinander unterhalb des Zweitonschrittes und füllten dann den Tetrachord aus.

Da der chromatische und vor allem der enharmonische Tetrachord von nahe beieinanderliegenden Tonstufen geprägt waren, kann man nun auch die oben beschriebene Bezeichnung diatonisch (auseinandergespannt, hindurchgespannt) als Gegensatz dazu besser verstehen. Der diatonische Tetrachord war von den Tonstufen gleichmäßiger durchspannt, die Töne waren eben mehr auseinandergespannt und häuften sich nicht in einem engeren Bereich.

**Enharmonischer dorischer Tetrachord**

**A** **– Zweitonschritt** **F** **– Viertelton** **– F** **– Viertelton** **E**

**Die ganze enharmonische dorische Skala bestand somit aus der Tonfolge:**

**e c – c H A F – F E**

### 1.2.3 Gleichmäßige Stimmungen

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels sehr deutlich aufgezeigt wurde, entstehen bei der Ableitung der Tonstufen aus der natürlichen Obertonreihe viele unterschiedliche Intervalle. So gibt es mehrere Ganztöne und Halbtöne, was das Modulieren von einer Tonart in eine andere erheblich erschwert und bei einigen Tonarten zu unerwünschten Dissonanzen (Mißklängen) führen kann. Deshalb wurde schon in der Antike der Versuch unternommen, diesem gewichtigen Problem der musikalisch-harmonikalen Struktur Herr zu werden, indem man begann, die einzelnen Töne so zu verstimmen, daß der Intervallfaktor von Tonstufe zu Tonstufe möglichst konstant bleibt.

Die ersten Überlieferungen gleichmäßiger chromatischer Stimmungen berichten von der Stimmung des Aristoxenos, der den Halbtonschritt mit dem Intervall 18/17 = 1,058 824 (= 98,95 Cent) gleichsetzte. Zwölf aneinandergereihte Halbtöne ergeben zwar nicht eine vollkommene Oktave, doch kommen sie dieser sehr nahe, denn es ist: $(18/17)^{12}$ = 1,985 560 (= 1.187,46 Cent), so daß der Wert 2 der Oktave nur um den Faktor 0,992 780 respektive 12,54 Cent verfehlt wird. Für den Fachexperten sei vorweggenommen, daß dieses Intervall kleiner als ein Diaschisma ist. Das Diaschisma wird im Abschnitt „Kleine und große Diesis, syntonisches Komma, Schisma und Diaschisma“ [1.4.6 ab S. 42] erläutert.

In der Folge wird die 12-stufige gleichmäßige Stimmung erläutert, wobei hier vorweggenommen sei, daß es auch noch sehr harmonische 19- und 31-stufige gleichmäßige Stimmungen gibt. Harmonisch bedeutet vor allem, daß die Quinten sowie die großen und kleinen Terzen möglichst rein sind. Bei der 19-tönigen Stimmung sind die Terzen wesentlich reiner als bei der 12-tönigen, wobei die kleine Terz beinahe genau rein ist, die Quinte jedoch deutlich unreiner ist. Die 31-stufige gleichmäßige Tonleiter wurde von dem niederländischen Wissenschaftler Christiaan Huyghens (1629-1695), der sich unter anderem mit der Physik von Pendeln und Uhren beschäftigte, berechnet. In dieser Stimmung ist die große Terz nahezu rein.

#### Die 12-stufige gleichmäßige Stimmung

Die *12-stufige gleichmäßige Stimmung* ist die heute in der abendländischen Musikkultur allgemein gebräuchliche Stimmung. Sie wird zuweilen in etwas irreführender Weise mit *„gleichschwebender“* Stimmung bezeichnet, wobei hier anzumerken ist, daß die Schwebungen in dieser Stimmung nur proportional einander gleichen, jedoch nicht absolut. Von Oktave zu Oktave verdoppeln sich die Schwebungszahlen. Darum ist die Bezeichnung *„gleichmäßig“* präziser und es soll ihr hier der Vorzug gegeben werden. Daß die heute oft gebrauchte Bezeichnung *„chromatisch“* für diese Stimmung ebenfalls irreführend ist, geht aus den vorangegangenen Erläuterungen deutlich hervor, denn es gibt eine Vielzahl von Verfärbungen der reinen Stimmung, die alle mit Fug und Recht als „chromatisch“ bezeichnet werden können.

Früher nannte man eine Stimmung auch „Temperatur“, ein Begriff, den man heute eigentlich nur für die Unterscheidung von Kälte und Wärme gebraucht.

Die gleichmäßige Temperatur wurde im deutschen Sprachraum im Jahre 1691 von dem in Halberstadt lebenden sächsischen Organisten und Theoretiker Andreas Werkmeister (1645-1706) berechnet und er forderte in seinem Werk „*Musikalische Temperaturen*“ die Einführung dieser Stimmung für alle Tasteninstrumente. Im alten China war die gleichmäßige 12-stufige Temperatur schon 50 Jahre vor Werkmeisters Geburt bekannt. Der in der altchinesischen Tradition der Harmonik vertraute Prinz Chu Tsai Yü berechnete bereits 50 Jahre vor Werkmeisters Geburt die Intervallfaktoren der gleichmäßigen Temperatur auf neun Stellen genau. Auch in Frankreich war das gleichmäßige Stimmungssystem früher bekannt als in Deutschland. Der französische Mathematiker, Musiktheoretiker und Paulanermönch Marin Mersenne (1588-1648) beschrieb es 1636 in seiner „*Harmonie universelle*“.

Johann Sebastian Bach (1685-1750) hat als erster aus Werkmeisters Anregung und Forderung der Einführung dieses Stimmungssystems alle Konsequenzen gezogen und so die moderne Fuge kreiert. In Anlehnung an die Bezeichnung Temperatur für eine Tonart hat er seinem 24 Präludien und Fugen enthaltendes Hauptwerk, das alle Dur- und Moll-Tonarten durchwandert, deshalb auch den Namen „*Das wohltemperierte Klavier oder Präludia und Fugen durch alle Tone und Semitonia*“ gegeben. Er beendete das Werk in seinem ersten Teil im Jahre 1722, also 31 Jahre nach Werkmeisters Vorschlag. In den folgenden 22 Jahren, also bis 1744, vollendete Bach den zweiten Teil des „*Wohltemperierten Klaviers*“. Keine der 48 Fugen gleicht der anderen. Bach hat durch die gleichmäßig schwebende Temperatur kompositorisch mit allen damit verbundenen Modulationsmöglichkeiten eine zur freieren seelischen Aussprache geeignete Form geschaffen. Es gibt kein ihm vertrautes Stimmungsgebiet, das er nicht in seinen Fugen uns kunstvoll vor Ohren führte.

Aus der Tradition her gesehen, wie auch von der Logik her, scheint also die Bezeichnung „*gleichmäßige Temperatur*“ für die heute gebräuchliche Stimmung korrekt und angebracht zu sein.

Die gleichmäßig schwebende Temperatur zeichnet sich dadurch aus, daß alle zwölf Halbtonstufen das gleiche Intervallfrequenzverhältnis haben. Somit haben in dieser Stimmung auch alle anderen Intervalle jeweils das identisch gleiche Intervallfrequenzverhältnis, das heißt, daß alle Ganztöne, alle kleine Terzen, alle große Terzen, alle Quarten, Tritoni, Quinten und so weiter jeweils stets das gleiche Intervallfrequenzverhältnis aufweisen. Das hat zwar zur Folge, daß außer der Oktave alle Intervalle mehr oder weniger etwas verstimmt sind, doch dafür kann man beliebig von einer Tonart in die andere überwechseln, ohne daß es zu stärkeren Verstimmungen kommt, als in der Grundtonart.

Damit die zwölf Tonstufen (Halbtonschritte) innerhalb der Oktave alle das gleiche Intervallfrequenzverhältnis aufweisen, muß der Intervallfaktor die Zahl sein, die zwölf Mal mit sich selbst multipliziert die Zahl Zwei ergibt.

Aus der Schulzeit (Mathematikunterricht) kann sich vielleicht so mancher noch daran erinnern, daß die Quadratwurzel einer Zahl den Wert zum Resultat hat, der mit sich selbst multipliziert die ursprüngliche Zahl ergibt. Die Kubikwurzel einer Zahl hat den Wert zum Resultat, der drei Mal mit sich selbst multipliziert wiederum die ursprüngliche Zahl zum Resultat hat. Und so hat die 12. Wurzel aus Zwei den Wert zum Resultat, der 12 Mal mit sich selbst multipliziert die Zahl 2 ergibt. In der Sprache der Mathematik wird dies wie folgt geschrieben:

$$2^{(1/12)} = 1{,}059\,463$$

Und es ist:

$$[\ln (2^{(1/12)}) \,/\, \ln (2)] \times 1.200 \text{ Cent} = 100 \text{ Cent}$$

In der gleichmäßig schwebenden Temperatur umfaßt jeder Halbtonschritt 100 Cent, jeder Ganztonschritt 200 Cent, jede kleine Terz 300 Cent, jede große Terz 400 Cent, jede Quarte 500 Cent, jeder Tritonus 600 Cent, jede Quinte 700 Cent, jede kleine Sexte 800 Cent, jede große Sexte 900 Cent, jede kleine Septime 1.000 Cent, jede große Septime 1.100 Cent und jede Oktave 1.200 Cent.

### Die 12-stufige gleichmäßige Stimmung und der Quintenzirkel

Zwölf Quinten haben einen Tonumfang, der etwas größer ist als sieben Oktaven. Der Intervallfaktor von zwölf Quinten ist:

$$(3/2)^{12} = 129{,}746338 \text{ entsprechend } 8.423{,}46 \text{ Cent}$$

Der Intervallfaktor von sieben Oktaven ist:

$$2^7 = 128{,}000000 \text{ entsprechend } 8.400{,}00 \text{ Cent}$$

Zwölf Quinten sind somit um 23,46 Cent größer als sieben Oktaven. Dieses kleine Intervall, das etwas kleiner als ein Achtelton ist [Intervallfaktor: $(3/2)^{12}$ / $2^7$ = 1,013643], wird *pythagoreisches Komma* genannt. In der 12-stufigen gleichmäßigen Stimmung wird jede Quinte um 1/12 eines pythagoreischen Kommas verkleinert, damit 12 „Quinten“ genau 7 Oktaven umfassen. Das heißt, jede Quinte wird um den folgenden Wert verkleinert:

$$[(3/2)^{12} / 2^7]^{(1/12)} = 1{,}001\,129\,891 \text{ entsprechend } 23{,}46 \text{ Cent} / 12 = 1{,}955 \text{ Cent}$$

Da die pythagoreische Stimmung eine reine Quintenstimmung ist, unterscheiden sich alle Intervalle der pythagoreischen Stimmung (außer der Prime und der Oktave, die gleich sind) um 1,955 Cent oder um ein ganzzahliges Vielfaches davon von den Intervallen der 12-stufigen gleichmäßigen Stimmung:

| 12-stufige gleichmäßige Stimmung | | pythagoreische Stimmung | | Differenz als Vielfaches von |
|---|---|---|---|---|
| **Intervall** | **Centwert** | **Centwert** | **Differenz** | **1,955 Cent** |
| Prime | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0 |
| Quinte | 700,000 | 701,955 | 1,955 | 1 |
| Quarte | 500,000 | 498,045 | -1,955 | -1 |
| Große Sekunde | 200,000 | 203,910 | 3,910 | 2 |
| Kleine Septime | 1000,000 | 996,090 | -3,910 | -2 |
| Große Sexte | 900,000 | 905,865 | 5,865 | 3 |
| Kleine Terz | 300,000 | 294,135 | -5,865 | -3 |
| Große Terz | 400,000 | 407,820 | 7,820 | 4 |
| Kleine Sexte | 800,000 | 792,180 | -7,820 | -4 |
| Große Septime | 1100,000 | 1109,775 | 9,775 | 5 |
| Kleine Sekunde | 100,000 | 90,225 | -9,775 | -5 |
| Oktave | 1200,000 | 1200,000 | 0,000 | 0 |

Die Art und Weise, wie die pythagoreischen Intervalle mittels Quintenschritte und Oktavschritte rein gestimmt werden können, ist auf der Abbildung auf der nächsten Seite ersichtlich.

### 1.2.4 Stimmschlüssel zur pythagoreischen Stimmung (reine Quintenstimmung)

Die unten stehende Abbildung zeigt, wie mittels Quintenschritte die Intervalle der pythagoreischen Stimmung erzielt werden.

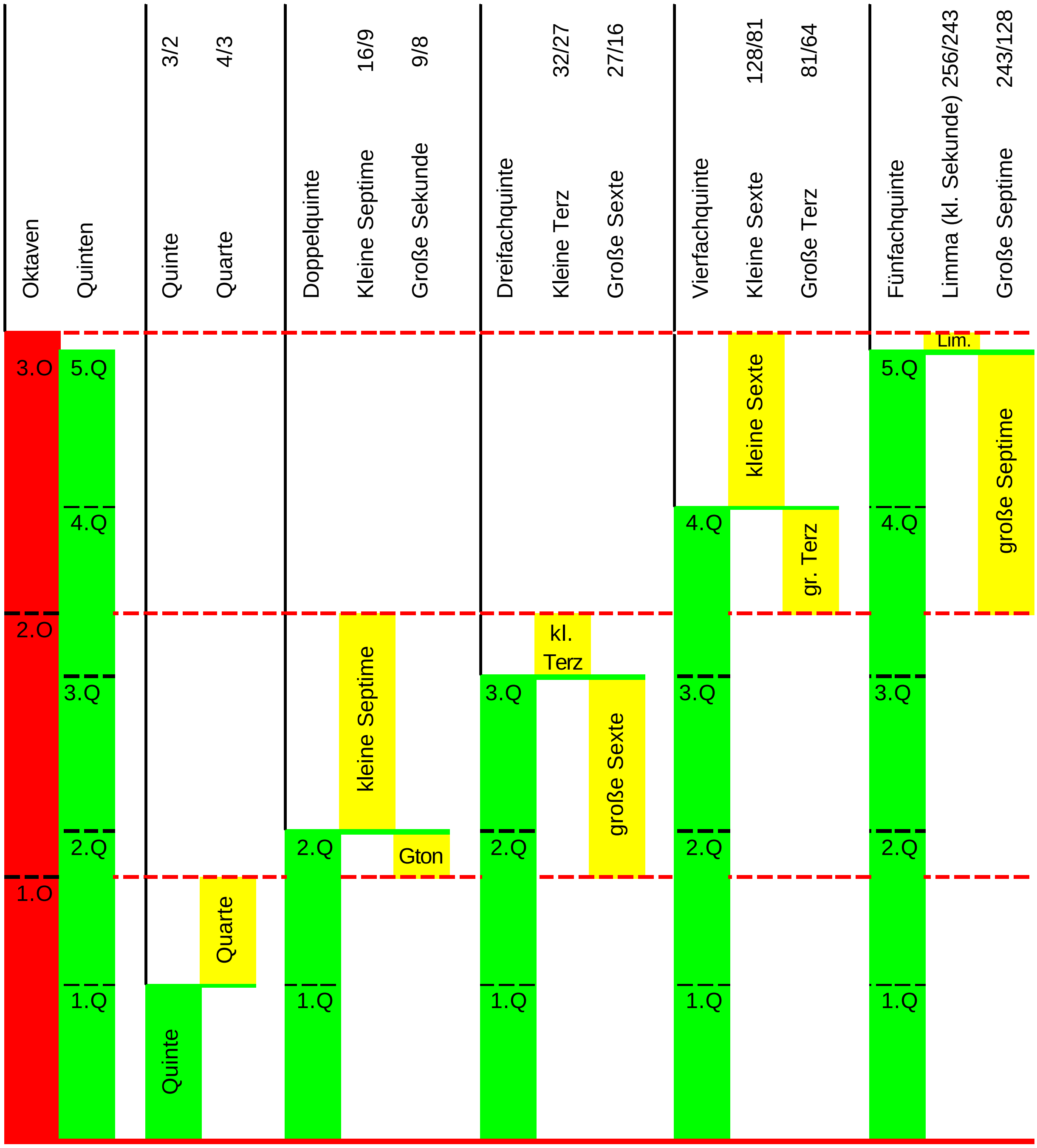



**Abb. 8** zeigt wie mittels Quintenschritte und Oktavsprünge die Intervalle der psthagoreischen Stimmung erzielt werden. In roter Farbe sind die Oktaven markiert, in grüner Farbe die Quinten und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten eine rot gestrichelte Linie berühren, werden durch Quintenschritte nach oben (aufsteigende Quinten) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben eine rot gestrichelte Linie berühren, werden durch Quintenschritte nach unten (absteigende Quinten) erzielt. Beispiele: der Ganzton (große Sekunde) wird eingestimmt, indem man zuerst zwei Quinten nach oben stimmt, dann eine Oktave hinunter, die kleine Septime hingegen durch zwei Quintensprünge nach unten und zwei Oktaven nach oben.

Die unten stehende Abbildung zeigt den Stimmschlüssel zur pythagoreischen Quintenstimmung als Tabelle gemäß der Struktur der Intervallerzeugung.

| Ton-stufe | Intervallverhältnis Zähler | Nenner | Intervallname | Anzahl Q. | Okt. | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H## | 1.162.261.467 | 1.073.741.824 | Do.üb Sept. (Apo.+ Komma) | 19 | -11 | 1,082440 | 137,15 |
| E## | 387.420.489 | 268.435.456 | Doppelt üb. Terz | 18 | -10 | 1,443254 | 635,19 |
| A## | 129.140.163 | 67.108.864 | Doppelt üb. Sexte | 17 | -9 | 1,924338 | 1.133,24 |
| D## | 43.046.721 | 33.554.432 | Doppelt üb. Sekunde | 16 | -9 | 1,282892 | 431,28 |
| G## | 14.348.907 | 8.388.608 | Doppelt üb. Quinte | 15 | -8 | 1,710523 | 929,33 |
| C## | 4.782.969 | 4.194.304 | Do. üb. Prime (do. Apotome) | 14 | -8 | 1,140349 | 227,37 |
| F## | 1.594.323 | 1.048.576 | Doppelt üb. Quarte | 13 | -7 | 1,520465 | 725,42 |
| H# | 531.441 | 524.288 | Üb. Septime (pyth. Komma) | 12 | -7 | 1,013643 | 23,46 |
| E# | 177.147 | 131.072 | Übermäßige Terz | 11 | -6 | 1,351524 | 521,51 |
| A# | 59.049 | 32.768 | Übermäßige Sexte | 10 | -5 | 1,802032 | 1.019,55 |
| D# | 19.683 | 16.384 | Übermäßige Sekunde | 9 | -5 | 1,201355 | 317,60 |
| G# | 6.561 | 4.096 | Übermäßige Quinte | 8 | -4 | 1,601807 | 815,64 |
| C# | 2.187 | 2.048 | Überm. Prime (Apotome) | 7 | -4 | 1,067871 | 113,69 |
| F# | 729 | 512 | Übermäßige Quarte | 6 | -3 | 1,423828 | 611,73 |
| **H** | 243 | 128 | **Große Septime** | 5 | -2 | 1,898438 | 1.109,78 |
| **E** | 81 | 64 | **Große Terz** | 4 | -2 | 1,265625 | 407,82 |
| **A** | 27 | 16 | **Große Sexte** | 3 | -1 | 1,6875 | 905,87 |
| **D** | 9 | 8 | **Große Sekunde (Ganzton)** | 2 | -1 | 1,125 | 203,91 |
| **G** | 3 | 2 | **Quinte** | 1 | 0 | 1,5 | 701,96 |
| **C** | 1 | 1 | **Prime** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **F** | 4 | 3 | **Quarte** | -1 | 1 | 1,333333 | 498,04 |
| B (Hb) | 16 | 9 | Kleine Septime | -2 | 2 | 1,777778 | 996,09 |
| Eb | 32 | 27 | Kleine Terz | -3 | 2 | 1,185185 | 294,13 |
| Ab | 128 | 81 | Kleine Sexte | -4 | 3 | 1,580247 | 792,18 |
| Db | 256 | 243 | Kleine Sekunde (Limma) | -5 | 3 | 1,053498 | 90,22 |
| Gb | 1.024 | 729 | Verminderte Quinte | -6 | 4 | 1,404664 | 588,27 |
| Cb | 4.096 | 2.187 | Verminderte Oktave | -7 | 5 | 1,872885 | 1.086,31 |
| Fb | 8.192 | 6.561 | Verminderte Quarte | -8 | 5 | 1,248590 | 384,36 |
| Bb (Hbb) | 32.768 | 19.683 | Verminderte Septime | -9 | 6 | 1,664787 | 882,40 |
| Ebb | 65.536 | 59.049 | Verminderte Terz | -10 | 6 | 1,109858 | 180,45 |
| Abb | 262.144 | 177.147 | Verminderte Sexte | -11 | 7 | 1,479811 | 678,49 |
| Dbb | 1.048.576 | 531.441 | Ver. Sekunde (pyth. Komma) | -12 | 8 | 1,973081 | 1.176,54 |
| Gbb | 2.097.152 | 1.594.323 | Doppelt verm. Quinte | -13 | 8 | 1,315387 | 474,58 |
| Cbb | 8.388.608 | 4.782.969 | Doppelt verm. Oktave | -14 | 9 | 1,753850 | 972,63 |
| Fbb | 16.777.216 | 14.348.907 | Doppelt verm. Quarte | -15 | 9 | 1,169233 | 270,67 |

**Abb. 9** zeigt den Stimmschlüssel zur pythagoreischen Quintenstimmung als Tabelle gemäß der Struktur der Intervallerzeugung. In der 1. Spalte sind die Tonbezeichnungen ausgehend von einem C (Prime) aufgelistet. Das ganzzahlige Teilungsverhältnis der Intervalle ist in den Spalten 2 und 3 aufgeführt (Zähler in Spalte 2 und Nenner in Spalte 3). In der 4. Spalte sind die Intervallnamen angegeben, in der 5. Spalte die Zahl der Quintenschritte (positive Werte = Quintenschritte nach oben, negative Werte = Quintenschritte nach unten), in der 6. Spalte die Zahl der Oktavschritte (positive Werte = Oktavsprünge nach oben, negative Werte = Oktavsprünge nach unten), in der 7. Spalte ist jeweils das Intervallverhältnis zu finden und in der 8. Spalte den dazugehörigen Centwert.

In der Mitte im weißen Bereich liegen die Stammtöne (entsprechend der C-Dur-Tonleiter) mit den reinen Intervallen Prime, Quarte und Quinte sowie den großen Varianten der Intervalle mit zwei Grundformen (Sekunde, Terz, Sexte und Septime). Darunter liegen im gelben Bereich die kleinen Varianten der Intervalle mit zwei Grundformen und die verminderten Varianten der reinen Intervalle. Im oberen gelben Bereich liegen die übermäßigen Varianten aller Intervalle. Im grünen Bereich ganz unten liegen die verminderten Varianten der Intervalle mit zwei Grundformen und die doppelt verminderten Varianten der reinen Intervalle. Im grünen Bereich ganz oben liegen die doppelt übermäßigen Varianten aller Intervalle.

Die unten stehende Abbildung zeigt die pythagoreischen Intervalle als Tabelle der Größe nach geordnet. Mit Ausnahme von den reinen Intervallen Prime, Quarte, Quinte und Oktave beziehen sich alle Angaben ausschließlich auf pythagoreische Intervalle. In der Fachliteratur werden deshalb die pythagoreischen Intervalle stets als solche gekennzeichnet (z.B. pythagoreische große Terz, pyth. doppelt verminderte Quarte). Dies ist notwendig, da die pythagoreischen Intervalle sich signifikant von den natürlichen Intervallen unterscheiden. So ist beispielsweise die pythagoreische kleine Terz etwa 21,5 Cent kleiner als die natürliche kleine Terz, hingegen ist die pythagoreische große Terz um etwa 21,5 Cent größer als die natürliche große Terz. Das gleiche gilt auch für die Sekunden, Sexten und Septimen. Das kleine Differenzintervall von etwa 21,5 Cent wird *syntonisches Komma* genannt. Farbzuordnung gemäß vorhergehende Abb. 9.

| Ton-stufe | Intervallverhältnis | | Intervallname | Anzahl | | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Zähler | Nenner | | Q. | Okt. | | |
| **C** | 1 | 1 | **Prime** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| H# | 531.441 | 524.288 | Üb. Septime (pyth. Komma) | 12 | -7 | 1,013643 | 23,46 |
| Db | 256 | 243 | Kleine Sekunde (Limma) | -5 | 3 | 1,053498 | 90,22 |
| C# | 2.187 | 2.048 | Überm. Prime (Apotome) | 7 | -4 | 1,067871 | 113,69 |
| H## | 1.162.261.467 | 1.073.741.824 | Do.üb Sept. (Apo.+ Komma) | 19 | -11 | 1,082440 | 137,15 |
| Ebb | 65.536 | 59.049 | Verminderte Terz | -10 | 6 | 1,109858 | 180,45 |
| **D** | 9 | 8 | **Große Sekunde (Ganzton)** | 2 | -1 | 1,125 | 203,91 |
| C## | 4.782.969 | 4.194.304 | Do. üb. Prime (do. Apotome) | 14 | -8 | 1,140349 | 227,37 |
| Fbb | 16.777.216 | 14.348.907 | Doppelt verm. Quarte | 15 | 9 | 1,169233 | 270,67 |
| Eb | 32 | 27 | Kleine Terz | -3 | 2 | 1,185185 | 294,13 |
| D# | 19.683 | 16.384 | Übermäßige Sekunde | 9 | -5 | 1,201355 | 317,60 |
| Fb | 8.192 | 6.561 | Verminderte Quarte | -8 | 5 | 1,248590 | 384,36 |
| **E** | 81 | 64 | **Große Terz** | 4 | -2 | 1,265625 | 407,82 |
| D## | 43.046.721 | 33.554.432 | Doppelt üb. Sekunde | 16 | -9 | 1,282892 | 431,28 |
| Gbb | 2.097.152 | 1.594.323 | Doppelt verm. Quinte | 13 | 8 | 1,315387 | 474,58 |
| **F** | 4 | 3 | **Quarte** | -1 | 1 | 1,333333 | 498,04 |
| E# | 177.147 | 131.072 | Übermäßige Terz | 11 | -6 | 1,351524 | 521,51 |
| Gb | 1.024 | 729 | Verminderte Quinte | -6 | 4 | 1,404664 | 588,27 |
| F# | 729 | 512 | Übermäßige Quarte | 6 | -3 | 1,423828 | 611,73 |
| E## | 387.420.489 | 268.435.456 | Doppelt üb. Terz | 18 | -10 | 1,443254 | 635,19 |
| Abb | 262.144 | 177.147 | Verminderte Sexte | -11 | 7 | 1,479811 | 678,49 |
| **G** | 3 | 2 | **Quinte** | 1 | 0 | 1,5 | 701,96 |
| F## | 1.594.323 | 1.048.576 | Doppelt üb. Quarte | 13 | -7 | 1,520465 | 725,42 |
| Ab | 128 | 81 | Kleine Sexte | -4 | 3 | 1,580247 | 792,18 |
| G# | 6.561 | 4.096 | Übermäßige Quinte | 8 | -4 | 1,601807 | 815,64 |
| Bb (Hbb) | 32.768 | 19.683 | Verminderte Septime | -9 | 6 | 1,664787 | 882,40 |
| **A** | 27 | 16 | **Große Sexte** | 3 | -1 | 1,6875 | 905,87 |
| G## | 14.348.907 | 8.388.608 | Doppelt üb. Quinte | 15 | -8 | 1,710523 | 929,33 |
| Cbb | 8.388.608 | 4.782.969 | Doppelt verm. Oktave | -14 | 9 | 1,753850 | 972,63 |
| B (Hb) | 16 | 9 | Kleine Septime | -2 | 2 | 1,777778 | 996,09 |
| A# | 59.049 | 32.768 | Übermäßige Sexte | 10 | -5 | 1,802032 | 1.019,55 |
| Cb | 4.096 | 2.187 | Verminderte Oktave | -7 | 5 | 1,872885 | 1.086,31 |
| **H** | 243 | 128 | **Große Septime** | 5 | -2 | 1,898438 | 1.109,78 |
| A## | 129.140.163 | 67.108.864 | Doppelt üb. Sexte | 17 | -9 | 1,924338 | 1.133,24 |
| Dbb | 1.048.576 | 531.441 | Ver. Sekunde (-pyth.Komma) | -12 | 8 | 1,973081 | 1.176,54 |
| **C** | 2 | 1 | **Oktave** | 0 | 1 | 2 | 1.200,00 |

**Abb. 10** zeigt die Intervalle der pythagoreischen Stimmung der Größe nach geordnet. Die Anordnung der Spalten ist genau gleich geartet wie in Abb. 9 auf der vorhergehenden Seite. Intervalle, deren Größe eine Oktave überschreiten, sind oben bei den kleinen Intervalle zu finden, wobei der jeweilige Centwert um 1.200 Cent reduziert wurde und der Intervallfaktor halbiert wurde (übermäßige Septime und doppelt übermäßige Septime). Farbzuordnung gemäß vorhergehende Abb. 9.

Mit Ausnahme von den reinen Intervallen Prime, Quarte, Quinte und Oktave beziehen sich alle Angaben ausschließlich auf pythagoreische Intervalle.

### 1.2.5 Das pythagoreische Komma

Ein *Komma* ist ein Schlag, ein Abschnitt oder auch ein Einschnitt. Das altgriechische Wort Komma ist dem griechischen Verb *koptein* „stoßen, schlagen, hauen“ entlehnt. Heutzutage bezeichnet man mit *Komma* in der Grammatik Satz- und Worttrennungen. In der Mathematik werden durch das Komma die Zehnerpotenzen angegeben (Fr. 125,65 bedeutet 125 Franken und 65 Rappen:: ein Hunderter, zwei Zehner, fünf Einer oder einen Fünfer, fünfzig Rappen und zehn Rappen und nochmals fünf Rappen). In der Musik werden mit *Kommata* (*Kommata* = Plural von Komma) kleine Restintervalle angezeigt.

Das *pythagoreische Komma* ist, wie schon erwähnt, das Restintervall – auch Differenzintervall – das aus zwölf Quinten und sieben Oktaven gebildet wird. Man nennt dieses kleine Intervall, das beim sogenannten Quintenzirkel übrig bleibt, *pythagoreisches Komma*, da in der reinen pythagoreischen Stimmung nur Quinten- und Oktavschritte gebraucht werden.

Der Stimmschlüssel für 12 Quinten ist: + 12 Q (12 Quinten nach oben stimmen). Dies führt zum Intervallfrequenzverhältnis von 1 zu 129,746 338 oder zum Centwert von 8.423,460. Da die reine Quinte dem 3. Teilton um eine Oktave herabgesetzt entspricht, ist der in Zweier- und Dreierpotenzen ausgedrückte Intervallwert gleich $3^{12}$ (dies besagt, daß man 12 Duodezimen hinaufstimmt) geteilt durch $2^{12}$ (dies besagt, daß man 12 Oktaven hinunterstimmt). Statt „$:2^{12}$“ oder „$/2^{12}$“ („geteilt durch zwei hoch zwölf) schreibt man im allgemeinen „x $2^{-12}$“ („mal zwei hoch minus zwölf“), was genau das gleiche bedeutet.

Die Angaben in Zweier-, Dreier- und Fünferpotenzen für musikalische Intervalle hat einen großen Vorteil: Man kann in einer Formel den mathematischen Wert des Intervallfrequenzverhältnisses ausdrücken und ebenso erkennt man darin den Stimmschlüssel. Positive Exponenten zeigen an, daß man hinaufstimmen muß, negative, daß man hinunterstimmen muß. Der Zahlwert des Exponenten zeigt an, wie oft man ein Intervall in der Folge stimmen muß, wobei die Zahl vor dem Exponenten das Intervall angibt. Eine 2 steht für die Oktave, eine 3 für die Duodezime (Quinte+Oktave) und eine 5 für die Dur-Terz (+2 Oktaven).

Des weiteren kann man mit Exponenten sehr einfach rechnen. Ist ein Intervall zum Beispiel um eine Oktave zu verkleinern, muß nur der Exponent hinter der 2 um 1 vermindert werden. Ist ein Intervall um eine natürliche Quinte zu vergrößern ($2^{-1}$ x $3^{1}$), dann muß man einfach den Exponenten hinter der 2 um 1 vermindern und denjenigen hinter der 3 um 1 vermehren. Soll das Intervall um 2 Quinten vergrößert werden ($2^{-2}$ x $3^{2}$), verdoppeln sich einfach die Werte.

Kommt bei einem Intervall keine 2, 3 oder 5 vor, heißt das, daß der Exponent dieser Zahlen den Wert 0 hat, da gemäß mathematischer Definition jede Zahl hoch Null gleich Eins ist. Kommt also bei einem Intervall die 2 nicht vor, und es soll ausgedrückt werden, daß dieses Intervall 3 Oktaven tiefer erklingen soll, dann ist einfach der Faktor $2^{-3}$ hinzuzufügen, denn 0 um 3 vermindert ergibt -3.

Stimmt man nun 7 Oktaven von der Tonstufe, die durch 12 Quinten gebildet wird, abwärts, heißt das mathematisch ausgedrückt: man teilt den Intervallwert 129,746338 durch 128 oder man subtrahiert den entsprechenden Centwert von 7 Oktaven (7 x 1.200 = 8.400) vom Centwert der 12 reinen Quinten 8.423,460 ab. So erhält man als Differenz den Centwert 23,460 des pythagoreische Kommas. In Exponentenschreibweise sieht das dann so aus: 12 Quinten entsprechen dem Wert $2^{-12}$ x $3^{12}$ und das herabstimmen um 7 Oktaven wird angezeigt, indem der Exponentenwert -12 bei der 2 um 7 vermindert wird, also nun -19 beträgt. So ist das Intervallfrequenzverhältnis des pythagoreischen Kommas:

$$2^{-19} \text{ x } 3^{12}$$

Die Rechnung bestätigt die Vorgehensweise, denn es ist: $3^{12}$ = 531.441 und $2^{19}$ = 524.288. Teilt man nun 531.441 durch 524.288 erhält man 1,013643265. Dies ist das Intervallfrequenzverhälnis des pythagoreischen Kommas.

In der Stimmtechnik kommt nicht nur das pythagoreische Komma als Ganzes vor, sondern auch 1/2, 1/4, 3/4 und 1/12 des Kommas spielen eine wichtige Rolle. So ist zum Beispiel die *„Werkmeister Quinte"* um 1/4 pythagoreisches Komma kleiner als die natürliche Quinte. Ganztöne und Halbtöne weichen in der *„Werkmeister Temperatur Nr. 3"* um 1/4, 1/2 und um 3/4 pytagoreische Kommata vom großen Ganzton, respektive vom pythagoreischen Limma ab.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnis** | | **Centwert** |
|---|---|---|---|
| Pyth. Komma | $2^{-19} \times 3^{12}$ | 1,013 643 265 | 23,460 010 |
| 1/2 Pyth. Komma | $2^{(-19/2)} \times 3^{6}$ | 1,006 798 522 | 11,730 005 |
| 1/4 Pyth. Komma | $2^{(-19/4)} \times 3^{3}$ | 1,003 393 503 | 5,865 003 |
| 3/4 Pyth. Komma | $2^{(-57/4)} \times 3^{9}$ | 1,010 215 097 | 17,595 008 |
| 1/12 Pyth. Komma | $2^{(-19/12)} \times 3^{1}$ | 1,001 129 891 | 1,955 001 |

So wie der Tritonus (drei Ganztöne) der gleichmäßigen Temperatur eine halbe Oktave ausmacht und der entsprechende Exponent halb so groß ist wie derjenige der Oktave (Tritonus: $2^{(6/12)}$ gleich $2^{(1/2)}$ und Oktave: $2^{(12/12)}$ gleich $2^{(1/1)}$ gleich 2), so sind die Exponenten eines halben pythagoreischen Kommas genau halb so groß wie diejenigen des ganzen pythagoreischen Kommas. Aus $2^{19}$ wird $2^{(-19/2)}$ und aus $3^{12}$ wird $3^{6}$.

Die Exponenten verhalten sich zueinander genau so wie die Centwerte. Der gleichmäßige Tritonus umfaßt 600 Cent, die Oktave 1200 Cent, also doppelt so viel. Das pythagoreische Komma umfaßt 23,460 Cent, 1/2 pythagoreische Komma halb soviel: 11,730 Cent.

Die gleichmäßige Quinte ist um 1/12 pythagoreisches Komma kleiner als die reine natürliche Quinte. In der gleichmäßigen Temperatur wird also, wie schon erwähnt, das pythagoreische Komma auf alle 12 Quintenschritte des Quintenzirkels gleichmäßig aufgeteilt.

### 1.2.6 Das pythagoreische Limma, die Apotome und andere kleine Intervalle

Das pythagoreische Limma (pythagoreische kleine Sekunde) mit dem Intervallfaktor von $2^{8} \times 3^{-5}$ (drei Oktaven hochstimmen und fünf Quinten runterstimmen) und dem Intervallfrequenzverhältnis von 1,053498 (= 90,244996 Cent) taucht häufig in der pythagoreischen Quintenstimmung auf, so z.B.:

| **Ausgangsintervall** | | **Zielintervall** |
|---|---|---|
| pythagoreisches Komma | + Limma = | Apotome |
| pythagoreische große Sekunde | + Limma = | pythagoreische kleine Terz |
| pythagoreische große Terz | + Limma = | Quarte |
| Quinte | + Limma = | pythagoreische kleine Sexte |
| pythagoreische große Sexte | + Limma = | pythagoreische kleine Septime |
| pythagoreische große Septime | + Limma = | Oktave |

Die Apotome (pythagoreische übermäßige Prime) mit dem Intervallfaktor $2^{11} \times 3^{7}$ (vier Oktaven runterstimmen und sieben Quinten hochstimmen) und dem Intervallfrequenzverhältnis von 1,067871 (= 113,685006 Cent) taucht auch häufig in der pythagoreischen Quintenstimmung auf, so z.B.:

| Ausgangsintervall | | Zielintervall |
|---|---|---|
| pythagoreische große Sekunde | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Sekunde |
| pythagoreische große Terz | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Terz |
| Quarte | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Quarte |
| Quinte | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Quinte |
| pythagoreische große Sexte | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Sexte |
| pythagoreische große Septime | + Apotome = | pythagoreische übermäßige Septime |
| pythagoreische große Sekunde | – Apotome = | pythagoreische kleine Sekunde (Limma) |
| pythagoreische große Terz | – Apotome = | pythagoreische kleine Terz |
| Quarte | – Apotome = | pythagoreische verminderte Quarte |
| Quinte | – Apotome = | pythagoreische verminderte Quinte |
| pythagoreische große Sexte | – Apotome = | pythagoreische kleine Sexte |
| pythagoreische große Septime | – Apotome = | pythagoreische kleine Septime |
| Oktave | – Apotome = | pythagoreische verminderte Oktave |
| Prime | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Prime |
| pythagoreische große Sekunde | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Sekunde |
| pythagoreische große Terz | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Terz |
| Quarte | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Quarte |
| Quinte | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Quinte |
| pythagoreische große Sexte | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Sexte |
| pythagoreische große Septime | + 2 Apotomen = | pyth. doppelt übermäßige Septime |
| pythagoreische große Sekunde | – 2 Apotomen = | pythagoreische verminderte Sekunde |
| pythagoreische große Terz | – 2 Apotomen = | pythagoreische verminderte Terz |
| Quarte | – 2 Apotomen = | pyth. doppelt verminderte Quarte |
| Quinte | – 2 Apotomen = | pyth. doppelt verminderte Quinte |
| pythagoreische große Sexte | – 2 Apotomen = | pythagoreische verminderte Sexte |
| pythagoreische große Septime | – 2 Apotomen = | pythagoreische verminderte Septime |
| Oktave | – 2 Apotomen = | pyth. doppelt verminderte Oktave |

Ein weiteres kleines Intervall ($\Delta_1$ = Limma – Komma) mit dem Intervallfaktor $2^{27}$ x $3^{-17}$ (10 Oktaven hochstimmen und 17 Quinten runterstimmen) und dem Intervallfrequenzverhältnis von 1,039318 (= 66,764985 Cent) spielt auch eine gewisse Rolle in der pythagoreischen Quintenstimmung, so z.B.:

| Ausgangsintervall | | Zielintervall |
|---|---|---|
| pyth. übermäßige Prime (Apotome) | + $\Delta_1$ = | pythagoreische verminderte Terz |
| pythagoreische große Sekunde | + $\Delta_1$ = | pyth. doppelt verminderte Quarte |
| pyth. doppelt übermäßige Prime | + $\Delta_1$ = | pythagoreische kleine Terz |

Ein weiteres kleines Intervall ($\Delta_2$ = Limma – Komma – Komma = Limma – 2 Kommata) mit dem Intervallfaktor $2^{46}$ x $3^{-29}$ (17 Oktaven hochstimmen und 29 Quinten runterstimmen) und dem Intervallfrequenzverhältnis von 1,025329 (= 43,304975 Cent) spielt ebenso eine gewisse Rolle in der reinen pythagoreischen Quintenstimmung, so z.B.:

| **Ausgangsintervall** | | **Zielintervall** |
|---|---|---|
| pyth. doppelt übermäßige Prime | + $\Delta_2$ = | pythagoreische doppelt verminderte Quarte |
| pyth. doppelt übermäßige Sekunde | + $\Delta_2$ = | pythagoreische doppelt verminderte Quinte |
| pyth. doppelt übermäßige Terz | + $\Delta_2$ = | pythagoreische verminderte Sexte |
| pyth. doppelt übermäßige Quinte | + $\Delta_2$ = | pythagoreische doppelt verminderte Oktave |
| pyth. doppelt übermäßige Sexte | + $\Delta_2$ = | Oktave + pythagoreische verminderte Sekunde |
| pyth. doppelt übermäßige Septime | + $\Delta_2$ = | Oktave + pythagoreische verminderte Terz |

Die folgende Abbildung zeigt die kleinen pythagoreischen Intervalle in der Übersicht und ihren Bezug zu den wichtigsten Intervallen im pythagoreischen Stimmungssystem.

| Intervallverhältnis Zähler | Nenner | | Intervall | Anzahl O. | Q. | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | **Prime** | 0 | 0 | 1,000000 | 0,00 |
| 531.441 | 4.096 | | 12 Quinten | 0 | 12 | 129,746338 | 8.423,46 |
| 128 | 1 | - | 7 Oktaven | 7 | 0 | 128,000000 | 8.400,00 |
| 531.441 | 524.288 | | **12 Quinten - 7 Oktaven = Pythago. Komma** | -7 | 12 | 1,013643 | 23,46 |
| 256 | 243 | | **Verminderte Sekunde (Limma)** | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 256 | 243 | | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 531.441 | 524.288 | + | Pythagoreisches Komma | -7 | 12 | 1,013643 | 23,46 |
| 2.187 | 2.048 | | **Übermäßige Prime (Apotome)** | -4 | 7 | 1,067871 | 113,69 |
| 256 | 243 | | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 256 | 243 | + | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 65.536 | 59.049 | | **Verminderte Terz** | 6 | -10 | 1,109858 | 180,45 |
| 256 | 243 | | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 256 | 243 | + | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 531.441 | 524.288 | + | Pythagoreisches Komma | -7 | 12 | 1,013643 | 23,46 |
| 9 | 8 | | **Große Sekunde (pythagoreischer Ganzton)** | -1 | 2 | 1,125000 | 203,91 |
| 256 | 243 | | Verminderte Sekunde (Limma) | 3 | -5 | 1,053498 | 90,22 |
| 2.187 | 2.048 | | Übermäßige Prime (Apotome) | -4 | 7 | 1,067871 | 113,69 |
| 9 | 8 | | **Große Sekunde (pythagoreischer Ganzton)** | -1 | 2 | 1,125000 | 203,91 |

**Abb. 11** zeigt die kleinen pythagoreischen Intervalle in der Übersicht und ihren Bezug zu den wichtigsten Intervallen im pythagoreischen Stimmungssystem.

## 1.3 Intervalle – Terzen

Der fünfte Teilton bildet eine natürliche große Terz (Dur-Terz) zur Bioktave (c' - e') vom Grundton C aus und ist zugleich der dritte Ton der diatonischen C-Dur-Tonleiter. Die Ergänzung von der natürlichen großen Terz zur Trioktave (e' - c'') ist das Intervall der natürlichen kleinen Sexte.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Grundton | C | 1. Teilton | Frequenz: | 64 Hz | | |
| | | | | | > | Oktave |
| Oktave | c | 2. Teilton | Frequenz: | 128 Hz | | |
| | | | | | > | Quinte |
| Duodezime | g | 3. Teilton | Frequenz: | 192 Hz | | |
| | | | | | > | Quarte |
| Bioktave | c‘ | 4. Teilton | Frequenz: | 256 Hz | | |
| | | | | | > | Natürliche große Terz |
| Bioktave + nat. gr. Terz | e‘ | 5. Teilton | Frequenz: | 320 Hz | | |
| | | | | | > | Natürliche kleine Sexte |
| Trioktave | c‘‘ | 8. Teilton | Frequenz: | 512 Hz | | |

In der Grundoktave hat die natürliche große Terz (c - e) den Intervallfaktor $5^1$ x $2^{-2}$ und das Intervallfrequenzverhältnis von 4 zu 5 respektive von 1 zu 5/4 = 1,250000 (= 386,313714 Cent) zum Grundton. Der natürlichen kleinen Sexte (e - c') entspricht der Intervallfaktor $2^3$ x $5^{-1}$ und das Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (5/4) = 8/5 = 1,600000 (= 813,686286 Cent).

Zwei natürliche große Terzen bilden zusammen das Intervall einer kleinen übermäßigen Quinte[4] mit dem Intervallfaktor $5^2$ x $2^{-4}$ und dem Intervallfrequenzverhältnis von (5/4) x (5/4) = 25/16 = 1,562500 (= 772,627428 Cent). Der kleinen übermäßigen Quinte entspricht das Ergänzungsintervall einer großen verminderte Quarte[5] mit dem Intervallfaktor $2^5$ x $5^{-2}$ und dem Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (25/16) = 32/25 = 1,280000 (= 427,372572 Cent).

Drei natürliche große Terzen bilden zusammen das Intervall einer kleinen übermäßigen Septime[6] mit dem Intervallfaktor $5^3$ x $2^6$ und dem Intervallfrequenzverhältnis von (5/4) x (5/4) x (5/4) = 125/64 = 1,953125 (= 1.158,94114 Cent). Der kleinen übermäßigen Septime entspricht das Ergänzungsintervall einer großen verminderte Sekunde (kleine Diesis)[7] mit dem Intervallfaktor $2^7$ x $5^3$ und dem Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (125/64) = 128/125 = 1,024000 (= 41,058858 Cent). Die kleine Diesis spielt in der klassischen Stimmtechnik eine große Rolle.

**Stimmtechnischer Hinweis**

Die natürliche große Terz mit 160 Hz hat genau die 1,25-fache Frequenz des Grundtons mit 128 Hz. Der 5. Teilton des Grundtons und der 4. Teilton der natürlichen großen Terz stimmen genau überein (640 Hz). Eine Terz mit 161 Hz ist um 1,00 Hz zu hoch eingestimmt. Der 4. Teilton dieser Terz schwingt mit 644 Hz, die Schwebungsfrequenz beträgt somit 4,00 Hz. Man muß also die natürliche große Terz um ein Hertz tiefer stimmen, damit man keine Schwebung mehr hören kann.

Die Schwebungszahl (die Frequenz des An- und Abschwellens der Lautstärke), die durch die Verstimmung einer natürlichen großen Terz hervorgerufen wird, ist viermal so groß wie die Verstimmung selbst.

---

4 Die kleine übermäßige Quinte ist um ein kleines Chroma größer als die reine Quinte.

5 Die große verminderte Quarte ist um ein kleines Chroma kleiner als die reine Quarte.

6 Die kleine übermäßige Septime ist um ein kleines Chroma größer als die natürliche große Septime.

7 Die große verminderte Sekunde (kleine Diesis) ist um ein kleines Chroma kleiner als die natürliche kleine Sekunde (diatonischer Halbton).

Die folgende Tabelle zeigt die Frequenzen von Grundton und natürlicher großer Terz, wie auch der dazugehörigen Obertöne. In der rechten Spalte sind die Frequenzen einer unstimmigen großen Terz in *kursiv* angegeben.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prime | c | 128 Hz | | | | |
| Oktave | c‘ | 256 Hz | natürliche große Terz | e | 160 Hz | *161 Hz* |
| Duodezime | g‘ | 384 Hz | Oktave der nat. großen Terz | e‘ | 320 Hz | *322 Hz* |
| Bioktave | c‘‘ | 512 Hz | Duodezime der nat. gr. Terz | h‘ | 480 Hz | *483 Hz* |
| Bioktave + nat. gr. Terz | e‘‘ | 640 Hz | Bioktave der nat. gr. Terz | e‘‘ | 640 Hz | *644 Hz* |
| Differenz | | | | | 0 Hz | *4 Hz* |

Die folgende Abbildung zeigt die Intervalle, die durch natürliche große Terzen und Oktaven gebildet werden.

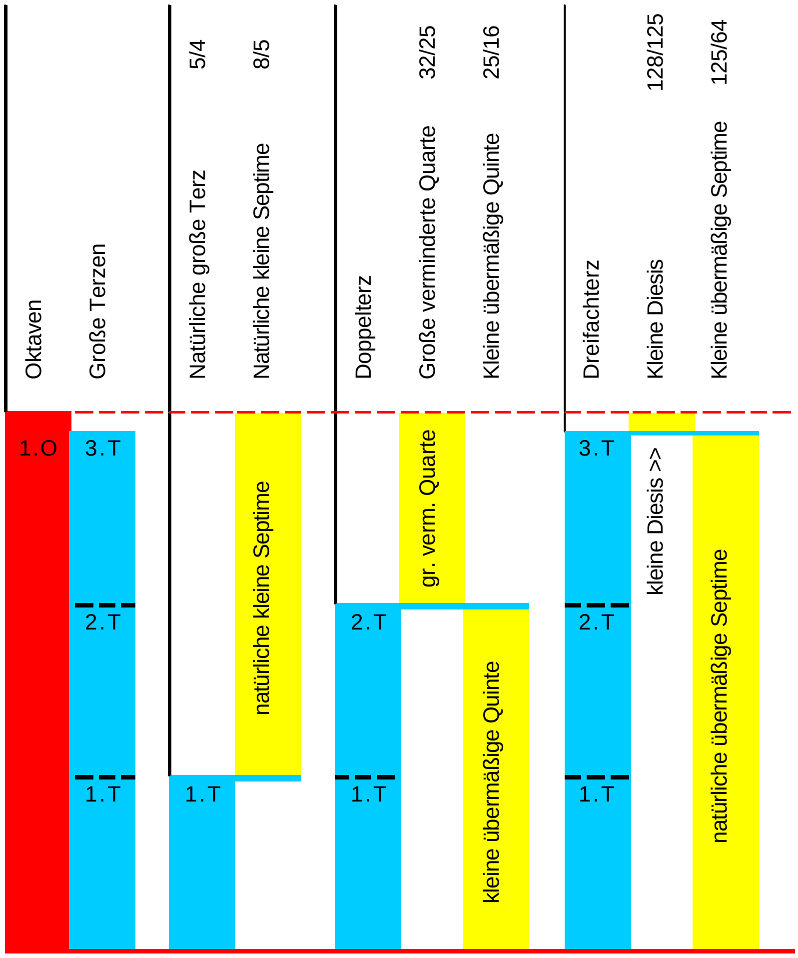



**Abb. 12** zeigt die Intervalle, die mittels reiner Dur-Terzen (natürliche große Terzen) und Oktaven eingestimmt werden können. In roter Farbe ist die Oktave markiert, in blauer Farbe die Terzen und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten die rote Linie berühren, werden durch Terzschritte nach oben (aufsteigende Terzen) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben die rot gestrichelte Linie berühren, werden durch Terzschritte nach unten (absteigende Terzen) erzielt. Beispiel: die kleine übermäßige Quinte wird eingestimmt, indem man zwei Terzen nach oben stimmt, die große verminderte Quarte hingegen durch zwei Terzsprünge nach unten und einer Oktave nach oben.

## 1.4 Intervalle – gemischte Quint-Terz-Intervalle

Neben der Prime, der natürlichen Dur-Terz, der reinen Quarte, der reinen Quinte und der Oktave bilden die Intervalle, die mittels Quint- und Terzschritte erzielt werden können, das Grundgerüst der meisten diatonischen, chromatischen und mitteltönigen Stimmungssysteme des europäischen Abendlandes.

Die große Terz (c - e) und die Quinte (c - g) bilden das Differenzintervall einer kleinen Terz, der sogenannten Moll-Terz (e - g). Von der Prime aus führt die kleine Terz zum Ton es, der ein Halbton tiefer liegt als der Ton e. Man nennt den Dreiklang c - e - g Dur-Dreiklang und den Dreiklang c - es - g Moll-Dreiklang. Das Frequenzverhältnis vom Grundton zur Moll-Terz ist somit der Quotient aus Quinte und großer Terz: (3/2) / (5/4) = 6/5 = 1,200000 (= 315,641287 Cent. Der Intervallfaktor in Exponentenschreibweise ist: $2^{1}$ x $3^{1}$ x $5^{-1}$

Natürliche kleine Terz + natürliche große Terz = Quinte

Das Intervall, das zwischen der natürlichen kleinen und der natürlichen großen Terz (es - e) liegt, ist ein kleiner Halbton, allgemein als *kleines Chroma* bezeichnet. Dem kleinen Chroma entspricht das Intervallfrequenzverhätnis von (5/4) / (6/5) = 25/24 = 1,041667 (= 70,672427 Cent). Der Intervall-faktor in Exponentenschreibweise ist: $2^{-3}$ x $3^{-1}$ x $5^{2}$

Natürliche große Terz + natürliche kleine Sexte = Oktave

Natürliche kleine Terz + natürliche große Sexte = Oktave

Die Oktave hat von der großen Terz (c - e) den Intervallabstand (e - c'). Diesem Intervall, der kleinen Sexte, wie auch dem Intervall (c - as), der kleinen Sexte von der Prime (dem Grundton) aus, entspricht das Intervallfrequenzverhätnis (2/1) / (5/4) = 8/5 = 1,600000 (= 813,686286 Cent). Der Intervallfaktor in Exponentenschreibweise ist: $2^{3}$ x $3^{0}$ x $5^{-1}$. Das Intervall as - c' ist somit wieder eine natürliche große Terz.

Die Ergänzung von der natürlichen kleinen Terz (c - es) zur Oktave c' ist die natürliche große Sexte (es - c') mit dem Intervallfrequenzverhätnis (2/1) / (6/5) = 5/3 = 1,666667 = (=884,358713 Cent). Der Intervallfaktor in Exponentenschreibweise ist: $2^{0}$ x $3^{-1}$ x $5^{1}$. Die natürliche große Sexte vom Grundton (der Prime) aus, führt zu einem a. Das Intervall (c - a) hat somit auch das Frequenzverhältnis 5/3 und die Ergänzung (a - c') bildet wiederum eine natürliche kleine Terz.

Das Intervall zwischen der reinen Quinte und der natürlichen kleinen Sexte (g - as) ist eine natürliche kleine Sekunde (natürlicher großer Halbton, diatonischer Halbton). Dem diatonischen Halbton entspricht das Intervallfrequenzverhätnis von (8/5) / (3/2) = 16/15 = 1,066667 (= 111,731285 Cent). Hier zeigt sich, daß zwischen den Intervallen, die aus der reinen Obertonreihe gebildet werden, völlig verschiedene „Kleinintervalle“ entstehen. Es gibt nicht nur einen, sondern verschiedene Halbtöne.

In der Rangfolge der Entstehung der Intervalle durch die Obertonreihe hat der diatonische Halbton (16/15) Vorrang vor dem kleinen Chroma (25/24).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Natürliche große Terz | – | natürliche kleine Terz | = | kleines Chroma |
| Natürliche große Sexte | – | natürliche kleine Sexte | = | kleines Chroma |
| Quarte | – | natürliche große Terz | = | diatonischer Halbton |
| Natürliche kleine Sexte | – | Quinte | = | diatonischer Halbton |

### 1.4.1 Natürliche Sekunden und Septimen

So wie es natürliche kleine und natürliche große Terzen und Sexten gibt, so gibt es auch natürliche kleine und natürliche große Sekunden und Septimen. Aus der Obertonreihe können jedoch jeweils verschiedene natürliche große Sekunden (Ganztöne) wie auch verschiedene kleine Sekunden (Halbtöne) bestimmt werden. Gleiches gilt für die Septimen, da diese jeweils die Ergänzung der Sekunden zur Oktave bilden.

Die folgende Zusammenstellung zeigt die Entstehung der verschiedenen Halb- und Ganztöne aus den reinen Intervallen der Obertonreihe. Links sind jeweils die Intervallbeziehungen angegeben, in der Mitte die Intervalllbezeichnungen (Intervallnamen) und rechts die Intervallfrequenzverhältnisse.

| **Intervallbeziehungen** | | **Bezeichnungen der Sekunden** | **Intervallfrequenzverhätnisse** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Quinte – Quarte | = | großer Ganzton | (3/2) / (4/3) | = | 9/8 |
| Quarte – natürliche kleine Terz | = | kleiner Ganzton | (4/3) / (6/5) | = | 10/9 |
| Quarte – natürliche große Terz | = | diatonischer Halbton | (4/3) / (5/4) | = | 16/15 |
| Nat. gr. Terz – nat. kleine Terz | = | kleines Chroma | (5/4) / (6/5) | = | 25/24 |
| Gr. Ganzton – diaton. Halbton | = | großes Chroma | (9/8) / (16/15) | = | 135/128 |

Der große Ganzton (9/8) = 1,125000 (= 203,910002 Cent) wird auch pythagoreischer Ganzton genannt, da er ausschließlich durch Quinten- und Oktavschritte stimmbar ist. Entsprechend wird die kleine Septime, die den großen Ganzton zur Oktave ergänzt, pythagoreische kleine Septime genannt. Diese hat das Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (9/8) = 16/9 = 1,777778 (= 996,089998 Cent). Der Intervallfaktor in Exponentenschreibweise ist: $2^4 \times 3^{-2} \times 5^0$. Von einem Grundton c führt diese pythagoreische kleine Septime zum Ton b und zeichnet sich dadurch aus, daß die Quinte auf diesem b genau zum f‘ der nächst höheren Oktave führt.

Der phythagoreische Ganzton wird eingestimmt, indem man von einem Grundton c zuerst die Quinte zum g, dann vom g aus nochmals eine Quinte hinauf zum d' stimmt um dann schließlich eine Oktave tiefer den Ton d zu finden. In Kurzform geschrieben: -1 O; +2 Q.

Die kleine pythagoreische Septime wird eingestimmt, indem man von einem Grundton c zuerst zwei Oktaven aufwärts (c - c‘ - c‘‘) und dann zwei Quinten abwärts (c‘‘ - f‘ - b) stimmt. In Kurzform geschrieben: +2 O; -2 Q.

Pythagoreischer Ganzton + pythagoreische kleine Septime = Oktave

$$(9/8) \times (16/9) = 2/1 = (2^{-3} \times 3^2) \times (2^4 \times 3^{-2}) = 2^1 \times 3^0$$

Pythagoreische kleine Septime + Quinte = Oktave + Quarte

$$(16/9) \times (3/2) = 8/3 = (2/1) \times (4/3) = (2^4 \times 3^{-2}) \times (2^{-1} \times 3^1) = 2^3 \times 3^{-1} = (2^1 \times 3^0) \times (2^2 \times 3^{-1})$$

Die Ergänzung des kleinen Ganztones (10/9) = 1,111111 (= 182,403712 Cent, auch natürliche große Sekunde genannt) zur Oktave ist die natürliche kleine Septime mit dem Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (10/9) = (9/5) = 1,800000 (= 1.017,596288 Cent). Der Stimmschlüssel zum kleinen Ganzton ist: +1 O; -2 Q; +1 T, zur natürlichen kleinen Septime +2 Q; -1 T.

Der Begriff *natürlich* wird zur Unterscheidung von *pythagoreischen Intervallen* vor die Intervallnamen gesetzt, da erstere der natürlichen Obertonreihe näher stehen und letztere nur aus Quinten- und Oktavschritten gestimmt werden (die natürlichen Terzen und Sexten werden substituiert).

Die natürliche kleine Septime (9/5) liegt genau eine Quinte über der natürlichen kleinen Terz, denn es ist: (9/5) / (6/5) = 9/6 = 3/2. Das Intervall (es - b) ist rein, das Intervall (b – f‘) ergibt jedoch keine reine Quinte und ist somit nicht rein: (8/3) / (9/5) = 40/27 = 1,481481 (= 680,45 Cent).

Natürlicher Ganzton + natürliche kleine Septime = Oktave

$$(10/9) \text{ x } (9/5) = 2/1 = (2^{1} \text{ x } 3^{-2} \text{ x} 5^{1}) \text{ x } (2^{0} \text{ x } 3^{2} \text{ x } 5^{-1}) = 2^{1} \text{ x } 3^{0} \text{ x } 5^{0}$$

Natürliche kleine Septime – Quinte = natürliche kleine Terz

$$(9/5) / (3/2) = 6/5 = (2^{0} \text{ x } 3^{2} \text{ x } 5^{-1}) / (2^{-1} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{0}) = 2^{1} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{-1}$$

Die Ergänzung des diatonischen Halbtones (16/15) = 1,066667 (= 111,731285 Cent), auch natürliche kleine Sekunde genannt, zur Oktave ist die natürliche große Septime mit dem Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (16/15) = 15/8 = 1,875000 (= 1.088,268715 Cent). Die natürliche große Septime h, von einem Grundton c aus gerechnet, liegt genau eine reine Quinte über der natürlichen großen Terz e (5/4).

Der Stimmschlüssel zum diatonischen Halbton ist: +1 O; -1 Q; -1 T. Die große Septime erreicht man mit den Stimmschritten: +1 Q; +1 T.

Diatonischer Halbton + natürliche große Septime = Oktave

$$(16/15) \text{ x } (15/8) = 2/1 = (2^{4} \text{ x } 3^{-1} \text{ x } 5^{-1}) \text{ x } (2^{-3} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{1}) = 2^{1} \text{ x } 3^{0} \text{ x } 5^{0}$$

Natürliche große Septime – Quinte = natürliche große Terz

$$(15/8) / (3/2) = 5/4 = (2^{-3} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{1}) / (2^{-1} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{0}) = 2^{-2} \text{ x } 3^{0} \text{ x } 5^{1}$$

Die Ergänzung des kleinen Chroma (25/24) = 1,041667 (= 70,672427 Cent), auch kleine übermäßige Prime[8] genannt, ist die große verminderte Oktave[9] mit dem Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (25/24) = 48/25 = 1,920000 (= 1.129,327573 Cent). Von einem Grundton c aus ist das kleine Chroma somit ein cis und die große verminderte Oktave ein ces.

Der Stimmschlüssel zum kleinen Chroma ist: -1 Q; +2 T; der zur großen verminderten Oktave: +1 O; +1 Q; -2 T.

Kleines Chroma + große verminderte Oktave = Oktave

$$(25/24) \text{ x } (48/25) = 2/1 = (3^{-3} \text{ x } 3^{-1} \text{ x } 5^{2}) \text{ x } (2^{4} \text{ x } 3^{1} \text{ x } 5^{-2}) = 2^{1} \text{ x } 3^{0} \text{ x } 5^{0}$$

Die Ergänzung des großen Chroma (135/128) = 1,054687 (92,178716 Cent), auch große übermäßige Prime genannt, ist die kleine verminderte Oktave mit dem Intervallfrequenzverhältnis von:
(2/1) / (135/128) = (256/135) = 1,896296 (= 1.107,821284 Cent) Der Stimmschlüssel zum großen Chroma ist: -2 O; +3 Q; +1 T, der zur kleinen verminderten Oktave: +3 O; -3 Q; -1 T.

[8] Kleine und große übermäßige Primen kommen nur im natürlichen Oktaven-Quinten-Terzen-Stimmsystem vor. In der pythagoreischen Stimmung gibt es nur verminderte, übermäßige, doppelt verminderte und doppelt übermäßige Primen. Deshalb kann hier auf den Zusatz „natürliche“ verzichtet werden.

[9] Kleine und große verminderte Oktaven kommen nur im natürlichen Oktaven-Quinten-Terzen-Stimmsystem vor. In der pythagoreischen Stimmung gibt es nur verminderte, übermäßige, doppelt verminderte und doppelt übermäßige Oktaven. Deshalb kann hier auf den Zusatz „natürliche“ verzichtet werden.

Großes Chroma + kleine verminderte Oktave = Oktave

$$(135/128) \times (256/135) = 2/1 = (2^{-7} \times 3^{3} \times 5^{1}) \times (2^{8} \times 3^{-3} \times 5^{-1}) = 2^{1} \times 3^{0} \times 5^{0}$$

Die Oktave, der erste Oberton in der Teiltonreihe, ist einfach zu stimmen und das zugehörige Intervallverhältnis ist einfacher Natur (2 zu 1). Quinte und Quarte sind aus den Gegebenheiten der Obertonreihe auch recht einfach zu stimmen. Die zugehörigen Intervallverhältnisse (3 zu 2 und 4 zu 3) sind auch noch recht einfacher Art. Terzen und Sexten gibt es bereit in zwei Varianten (große und kleine). Um diese Intervalle zu stimmen, braucht es bereits etwas mehr Übung. Bei den Halb- und Ganztönen, wie auch bei den kleinen und großen Septimen, respektive verminderten Oktaven, wird alles schon recht schwierig, vor allem, da man sich entscheiden muß, welche der gegebenen Intervalle man für eine Tonleiter auswählen möchte. Noch komplizierter wird es beim Tritonus, der zwischen der Quarte und der Quinte angesiedelt ist. Von diesem Intervall wird im folgenden die Rede sein.

### 1.4.2 Der Tritonus

Tritonus bedeutet: Drei Ganztöne. Ein Tritonus entsteht bei der Bildung eines übermäßigen Akkordes, das heißt, wenn man zum Beispiel zwei kleine Terzen übereinander setzt, bilden der Grundton und der höchste Ton des Akkordes einen Tritonus.

Aus den reinen und natürlichen Intervallen lassen sich die verschiedensten Verhältnisse für einen Tritonus herleiten. Setzt man zum Beispiel zwei natürliche kleine Terzen (6/5) übereinander, führt das zum Frequenzverhältnis von (6/5) x (6/5) = 36/25 = 1,440000 (= 631,282574 Cent). Dieses Intervall nennt man eine große verminderte Quinte. Der zugehörige Stimmschlüssel ist: +2 Q; -2 T (der Stimmschlüssel für die kleine Terz ist ja bekanntlich +1 Q; -1 T, für zwei kleine Terzen somit +2 Q; -2 T).

Eine Quinte abwärts von der großen verminderten Quinte führt, eine Oktave tiefer, zur großen verminderten Oktave, eine Quinte aufwärts zu einem Intervall, das pythagoreisches Limma genannt wird.

Kleine Terz + kleine Terz = große verminderte Quinte

$$(6/5) \times (6/5) = 36/25 = (2^{1} \times 3^{1} \times 5^{-1}) \times (2^{1} \times 3^{1} \times 5^{-1}) = 2^{2} \times 3^{2} \times 5^{-2}$$

Oktave + große verminderte Quinte – reine Quinte = große verminderte Oktave

$$(2/1) \times (36/25) / (3/2) = 48/25 = 2^{1} \times (2^{2} \times 3^{2} \times 5^{-2}) / (2^{-1} \times 3^{1}) = 2^{4} \times 3^{1} \times 5^{-2}$$

Da der Tritonus in der Mitte der Oktave liegt, kann man natürlich auch die beiden kleinen Terzen von oben nach unten stimmen, also vom Oktavton aus abwärts. Das führt zum Intervallfrequenzverhältnis von (2/1) / (36/25) = 25/18 = 1,388889 (= 568,717426 Cent). Anders oder ausführlicher ausgedrückt kann man auch schreiben: (2/1) / [(6/5) x (6/5)] = 25/18. Dieses Intervall nennt man eine kleine übermäßige Quarte. Der Stimmschlüssel ist: +1 O; -2 Q; +2 T.

Die Quinte über der kleinen übermäßigen Quarte führt zum kleinen Chroma in der nächst höheren Oktave, die Quinte unter der kleinen übermäßigen Quarte führt zu einem Intervall, das man „kleine große Septime“ nennt. Ja jetzt scheint es wirklich verwirrend und kompliziert zu werden, doch so etwas gibt es, und in der Folge beim Studium dieses Buches, wird dieses Intervall noch mehrmals dem aufmerksamen Leser auffallen. Eine genauere Erläuterung und die nähere Begründung dieser Namensgebung folgt in späteren Kapiteln.

Oktave – natürliche kleine Terz – natürliche kleine Terz = kleine übermäßige Quarte

$$(2/1) / (6/5) / (6/5) = (5/3) / (6/5) = 25/18$$

$$= 2^{1} / (2^{1} \times 3^{1} \times 5^{-1}) / (2^{1} \times 3^{1} \times 5^{-1}) = (2^{0} \times 3^{-1}\ 5^{1}) / (2^{1} \times 3^{1} \times 5^{-1}) = 2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{2}$$

Kleine übermäßige Quarte + Quinte = Oktave + kleines Chroma

$$(25/18) \times (3/2) = (2/1) \times (25/24) = (2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{2}) \times (2^{-1} \times 3^{1}) = 2^{1} \times (2^{-3} \times 3^{-1} \times 5^{2}$$

Ein Intervall, daß um ein **kleines Chroma erhöht** ist, trägt die Bezeichnung ***klein – übermäßig***, ist es hingegen um ein **kleines Chroma erniedrigt**, so lautet die Bezeichnung: ***groß – vermindert***. Ein Intervall, daß um ein **großes Chroma erhöht** ist, trägt die Bezeichnung ***groß - übermäßig***, ist es jedoch um ein **großes Chroma erniedrigt**, trägt es die Bezeichnung ***klein - vermindert***.

Die beiden folgenden Tritoni unterscheiden sich von Quarte und Quinte jeweils um ein großes Chroma (135/128), also um eine große übermäßige Prime, im Gegensatz zu den beiden zuvor besprochenen, die sich um ein kleines Chroma (25/24), also um eine kleine übermäßige Prime von der reinen Quarte und der reinen Quinte unterscheiden.

Ein großes Chroma über der reinen Quarte liegt die große übermäßige Quarte mit dem Intervallfrequenzverhältnis von (4/3) x (135/128) = 45/32 = 1,406250 (= 590,223716 Cent). Die große übermäßige Quarte liegt genau eine Quinte über der natürlichen großen Septime (15/8) der nächst tieferen Oktave. Eine Quinte aufwärts führt zum großen Chroma in der nächst höheren Oktave. Stimmschlüssel: -1 O; +2 Q; +1 T.

Oktave + große übermäßige Quarte – Quinte = natürliche große Septime

$$(2/1) \times (45/32) / (3/2) = 15/8 = 2^{1} \times (2^{-5} \times 3^{2} \times 5^{1}) / (2^{-1} \times 3^{1}) = 2^{-3} \times 3^{1} \times 5^{1}$$

Das „Spiegelbild“ zur großen übermäßigen Quarte ist die kleine verminderte Quinte (Quinte – großes Chroma) mit dem Intervallfrequenzverhältnis von (3/2) / (135/128) = 64/45 = 1,422222 (= 609,776284 Cent). Eine Quinte aufwärts führt zum diatonischen Halbton in der nächst höheren Oktave. Stimmschlüssel: +2 O; -2 Q; -1 T.

Kleine verminderte Quinte + Quinte = Oktave + diatonischer Halbton

$$(64/45) \times (3/2) = (2/1) \times (16/15) = (2^{6} \times 3^{-2} \times 5^{-1}) \times (2^{-1} \times 3^{1}) = 2^{1} \times (2^{4} \times 3^{-1} \times 5^{-1})$$

Zwei weitere Tritoni sind aus der antiken Tradition überliefert. Die pythagoreische übermäßige Quarte (729/512) = $(3^{6}/2^{9})$ = 1,423828 (= 611,730005 Cent) und die pythagoreische verminderte Quinte (1024/729) = $(2^{10}/3^{6})$ = 1,404664 (= 588,269995 Cent). Die Stimmschlüssel für diese pythagoreischen Tritoni setzen sich nur aus Oktaven und Quinten zusammen. Für die pythagoreische übermäßige Quarte gilt: -3 O; +6 Q; für die pythagoreische verminderte Quinte gilt: +4 O; - 6 Q.

Die genaue Symmetrieachse (geometrisches Mittel) der Oktave liegt bei dem Wert der Quadratwurzel aus Zwei, also jener Zahl, die mit sich selbst multipliziert Zwei ergibt. Genau bei diesem Wert liegt der Tritonus der 12-stufigen gleichmäßigen Stimmung. Der diesem Tritonus zugehörige Intervallfaktor ist: $2^{(6/12)} = 2^{(1/2)}$ = 1,414214 (= 600,000 Cent). Dieses Intervall kann nur näherungsweise gestimmt werden, das heißt, man muß ein diesem Tritonus nahegelegenes Intervall rein stimmen, um dann dasselbe leicht zu verstimmen. Dabei muß man auf eine Technik zurückgreifen, die durch Zählen von Schwebungen charakterisiert ist. Jedem Klavierstimmer sind diese Techniken bekannt und sie können in jedem Handbuch zur Stimmtechnik nachgelesen werden.

Gleichmäßiger Tritonus + gleichmäßiger Tritonus = Oktave

$$(2^{(1/2)} \times 2^{(1/2)}) = 2^{1}$$

In der folgenden Tabelle sind die Intervallfrequenzverhältnisse von Quarte, den oben besprochenen Tritoni und der Quinte angegeben. In der rechten Spalte stehen die jeweils entsprechenden Centwerte.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnisse** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| Quarte | 4/3 | = | 1,333 333 | 498,044 999 |
| Kleine übermäßige Quarte | 25/18 | = | 1,388 889 | 568,717 426 |
| Pythagoreische verminderte Quinte | 1024/729 | = | 1,404 664 | 588,269 995 |
| Große übermäßige Quarte | 45/32 | = | 1,406 250 | 590,223 716 |
| Quadratwurzel aus Zwei | $2^{1/2}$ | = | 1,414 214 | 600,000 000 |
| Kleine verminderte Quinte | 64/45 | = | 1,422 222 | 609,776 284 |
| Pythagoreische übermäßige Quarte | 729/512 | = | 1,423 828 | 611,730 005 |
| Große verminderte Quinte | 36/25 | = | 1,440 000 | 631,282 574 |
| Quinte | 3/2 | = | 1,500 000 | 701,955 001 |

Es gelten folgende Beziehungen:

| | | |
|---|---|---|
| Quarte + kleines Chroma | = | kleine übermäßige Quarte |
| Quarte + pythagoreisches Limma (pyth. kleine Sekunde) | = | pythagoreische verminderte Quinte |
| Quarte + großes Chroma | = | große übermäßige Quarte |
| Quarte + diatonischer Halbton (natürliche kleine Sekunde) | = | kleine verminderte Quinte |
| Quarte + Apotome (pythagoreische übermäßige Prime) | = | pythagoreische übermäßige Quarte |
| Quarte + großes Limma | = | große verminderte Quinte |
| Quarte + großer Ganzton (pytagoreische große Sekunde) | = | Quinte |

und

| | | |
|---|---|---|
| Quinte – kleines Chroma | = | große verminderte Quinte |
| Quinte – pythagoreisches Limma (pyth. kleine Sekunde) | = | pythagoreische übermäßige Quarte |
| Quinte – großes Chroma | = | kleine verminderte Quinte |
| Quinte – diatonischer Halbton (natürliche kleine Sekunde) | = | große übermäßige Quarte |
| Quinte – Apotome (pythagoreische übermäßige Prime) | = | pythagoreische verminderte Quinte |
| Quinte – großes Limma | = | kleine übermäßige Quarte |
| Quinte – großer Ganzton (pytagoreische große Sekunde) | = | Quarte |

### 1.4.3 Graphische Stimmschlüssel – gemischte Quint-Terz-Intervalle

**Intervalle – eine Quinte – Terzen**

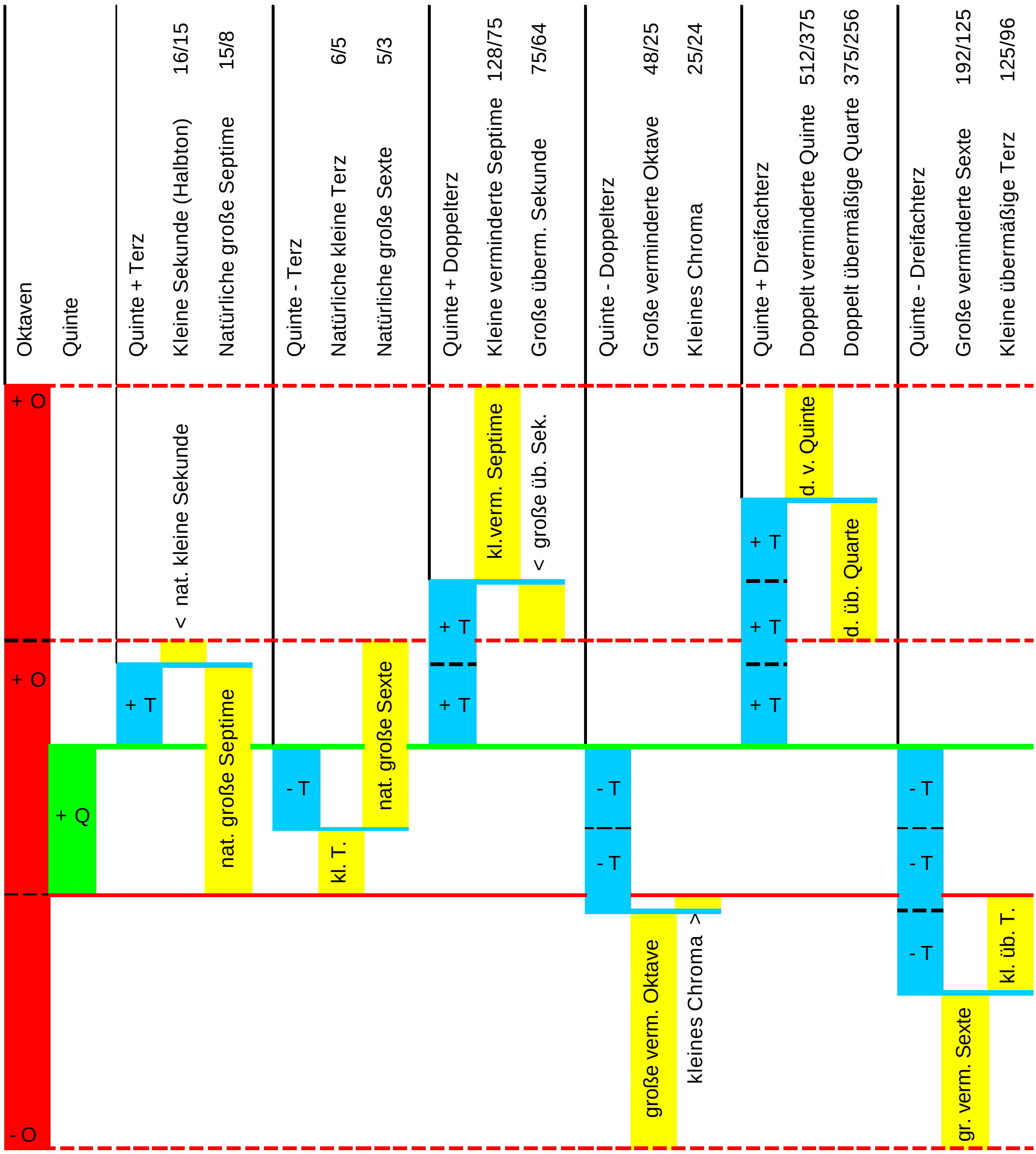



**Abb. 13 Intervalle – eine Quinte – Terzen**

Abbildung 13 zeigt den graphischen Stimmschlüssel für Intervalle, die mit einem Quintenschritt und einem, zwei oder drei Terzsprünge erzielt werden.

In roter Farbe sind die Oktaven markiert, in grüner Farbe die Quinte, in blauer Farbe die Terzen und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte gemäß angegebenen Vorzeichen (+ = aufsteigende, – = absteigende) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte in umgekehrter Richtung erzielt (+ = absteigende, – = aufsteigende Intervalle).

## Intervalle – zwei Quinten – Terzen

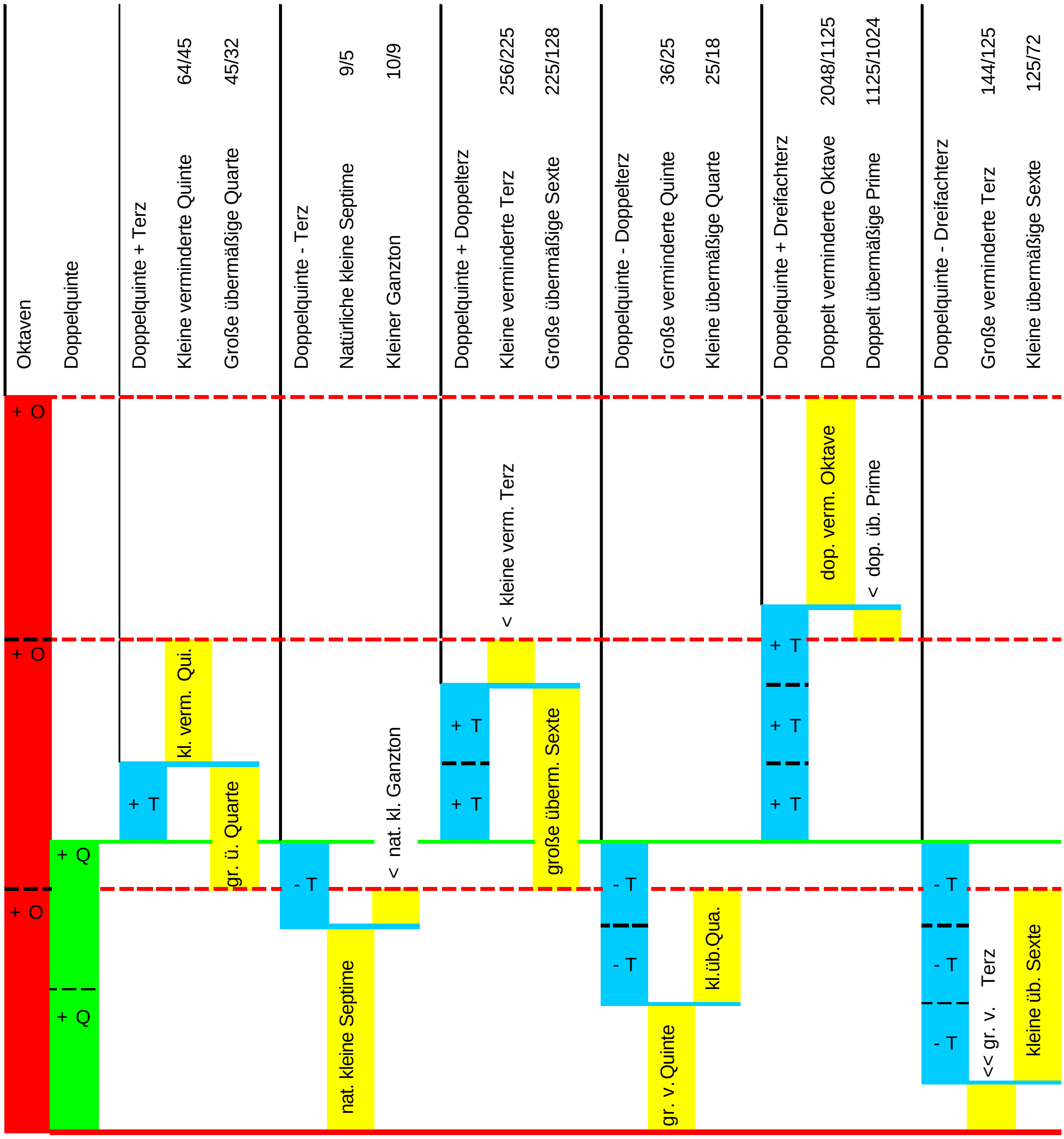



**Abb. 14 Intervalle – zwei Quinten – Terzen**

Abbildung 14 zeigt den graphischen Stimmschlüssel für Intervalle, die mit zwei Quintenschritte und einem, zwei oder drei Terzsprünge erzielt werden.

In roter Farbe sind die Oktaven markiert, in grüner Farbe die Quinten, in blauer Farbe die Terzen und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte gemäß angegebenen Vorzeichen (+ = aufsteigende, – = absteigende) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte in umgekehrter Richtung erzielt (+ = absteigende, – = aufsteigende Intervalle).

Beispiel: Die natürliche kleine Septime wird gestimmt, indem man zuerst zwei Quintensprünge nach oben und dann eine Terz nach unten stimmt, der natürliche kleine Ganzton hingegen, indem man zwei Quintensprünge nach unten und dann eine Terz und eine Oktave nach oben stimmt.

### 1.4.4 Intervalle – drei Quinten – Terzen

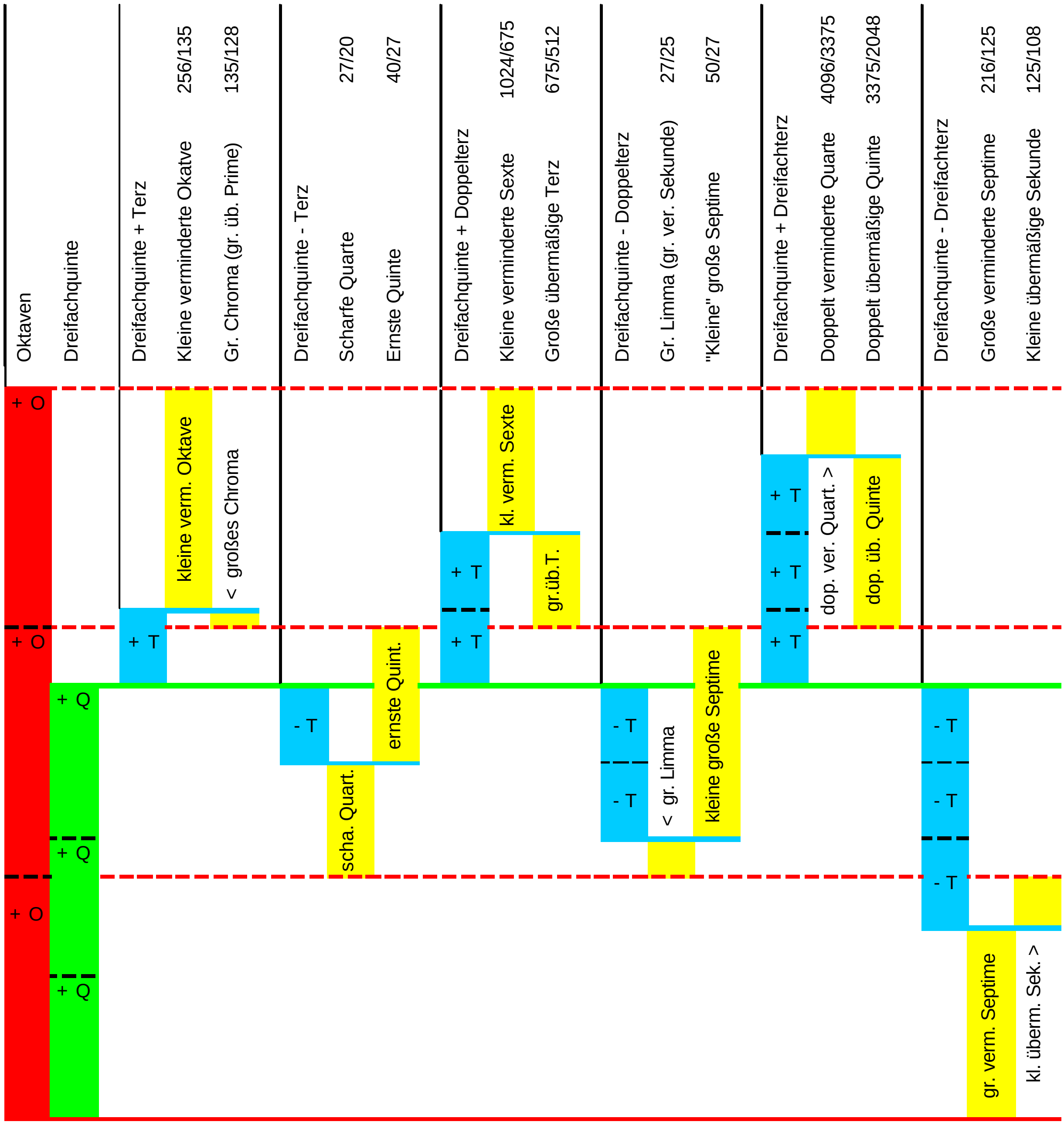



**Abb. 15 Intervalle – drei Quinten – Terzen**

Abbildung 15 zeigt den graphischen Stimmschlüssel für Intervalle, die mit drei Quintenschritte und einem, zwei oder drei Terzsprünge erzielt werden.

In roter Farbe sind die Oktaven markiert, in grüner Farbe die Quinten, in blauer Farbe die Terzen und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte gemäß angegebenen Vorzeichen (+ = aufsteigende, – = absteigende) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben eine rote Linie (durchgezogen oder gestrichelt) berühren, werden durch Quint- und Terzschritte in Umgekehrter Richtung erzielt (+ = absteigende, – = aufsteigende Intervalle).

Beispiel: Das große Limma wird gestimmt, indem man zuerst drei Quintensprünge nach oben und dann zwei Terzen und eine Oktave nach unten stimmt, die „kleine“ große Septime hingegen, indem man drei Quintensprünge nach unten und dann zwei Terzen und eine Oktave nach oben stimmt.

### 1.4.5 Intervalle – Übersicht klassische Quinten-Terzen-Stimmung

| Intervallverhältnis Zähler | Nenner | Intervallname | Anzahl Q. | T. | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | **Prime** | 0 | 0 | 1,000000 | 0,00 |
| 25 | 24 | Kleine übermäßige Prime (kleines Chroma) | -1 | 2 | 1,041667 | 70,67 |
| 135 | 128 | Große überäßige Prime (großes Chroma) | 3 | 1 | 1,054688 | 92,18 |
| 1.125 | 1.024 | Doppelt übermäßige Prime | 2 | 3 | 1,098633 | 162,85 |
| 2.048 | 2.025 | Kleine verminderte Sekunde (Diaschisma) | -4 | -2 | 1,011358 | 19,55 |
| 128 | 125 | Große verminderte Sekunde (kleine Diesis) | 0 | -3 | 1,024000 | 41,06 |
| 648 | 625 | "Große" große verm. Sekunde (große Diesis) | 4 | -4 | 1,036800 | 62,57 |
| 256 | 243 | Pythagoreische kl. Sekunde (pyth. Limma) | -5 | 0 | 1,053498 | 90,22 |
| 16 | 15 | **Kleine Sekunde (diatonischer Halbton)** | -1 | -1 | 1,066667 | 111,73 |
| 27 | 25 | Großes Limma | 3 | -2 | 1,080000 | 133,24 |
| 10 | 9 | **Große Sekunde (kleiner Ganzton)** | -2 | 1 | 1,111111 | 182,40 |
| 9 | 8 | Pythagoreische große Sekunde (gr. Ganzton) | 2 | 0 | 1,125000 | 203,91 |
| 125 | 108 | Kleine übermäßige Sekunde | -3 | 3 | 1,157407 | 253,08 |
| 75 | 64 | Große übermäßige Sekunde | 1 | 2 | 1,171875 | 274,58 |
| 256 | 225 | Kleine verminderte Terz | -2 | -2 | 1,137778 | 223,46 |
| 144 | 125 | Große verminderte Terz | 2 | -3 | 1,152000 | 244,97 |
| 32 | 27 | Pythagoreische kleine Terz | -3 | 0 | 1,185185 | 294,13 |
| 6 | 5 | **Natürliche kleine Terz** | 1 | -1 | 1,200000 | 315,64 |
| 5 | 4 | **Natürliche große Terz** | 0 | 1 | 1,250000 | 386,31 |
| 81 | 64 | Pythagoreische große Terz | 4 | 0 | 1,265625 | 407,82 |
| 125 | 96 | Kleine übermäßige Terz | -1 | 3 | 1,302083 | 456,99 |
| 675 | 512 | Große übermäßige Terz | 3 | 2 | 1,318359 | 478,49 |
| 4096 | 3.375 | Doppelt verminderte Quarte | -3 | -3 | 1,213630 | 335,19 |
| 512 | 405 | Kleine verminderte Quarte | -4 | -1 | 1,264198 | 405,87 |
| 32 | 25 | Große verminderte Quarte | 0 | -2 | 1,280000 | 427,37 |
| 320 | 243 | Ernste Quarte | -5 | 1 | 1,316872 | 476,54 |
| 4 | 3 | **Quarte** | -1 | 0 | 1,333333 | 498,04 |
| 27 | 20 | Scharfe Quarte | 3 | -1 | 1,350000 | 519,55 |
| 25 | 18 | Kleine übermäßige Quarte | -2 | 2 | 1,388889 | 568,72 |
| 45 | 32 | Große übermäßige Quarte | 2 | 1 | 1,406250 | 590,22 |
| 375 | 256 | Doppelt übermäßige Quarte | 1 | 3 | 1,464844 | 660,90 |

***Intervalle - klassische Quinten-Terzen-Stimmung - Teil I***

**Abb. 16** zeigt die Intervalle der klassischen Quinten-Terzen-Stimmung in der Übersicht bis zur doppelt übermäßigen Quarte. Die pythagoreischen Intervalle sind mit grüner Farbe markiert, die reinen und natürlichen Intervalle sind mit blauer Farbe markiert. Die pythagoreischen Intervalle sind jeweils um 21.51 Cent (= syntonisches Komma) kleiner respektive großer als die entsprechenden natürlichen Intervalle).

Die großen verminderten und die kleinen übermäßigen Intervalle sind mit violetter Farbe markiert. Diese Intervalle sind jeweils um 70,67 Cent (= kleines Chroma) kleiner respektive größer als die entsprechenden reinen oder natürlichen Intervalle. Die kleinen verminderten und die großen übermäßigen Intervalle sind mit bräunlicher Farbe markiert. Diese Intervalle sind jeweils um 92,18 Cent (= großes Chroma) kleiner respektive größer als die entsprechenden natürlichen Intervalle und um 70,67 Cent (= kleines Chroma) kleiner respektive größer als die entsprechenden mit grüner Farbe markierten pythagoreischen Intervalle. Die doppelt verminderten oder doppelt übermäßigen Intervalle sind mit gelber Farbe markiert. Sie sind jeweils um 162,05 Cent (= kleines Chroma + großes Chroma) kleiner respektive größer als die entsprechenden reinen Intervalle.

## Intervalle – Übersicht klassische Quinten-Terzen-Stimmung (Fortsetzung)

| Intervallverhältnis Zähler | Nenner | Intervallname | Anzahl Q. | T. | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | **Oktave** | 0 | 0 | 2,000000 | 1.200,00 |
| 48 | 25 | Große verminderte Oktave | 1 | -2 | 1,920000 | 1.129,33 |
| 256 | 135 | Kleine verminderte Oktave | -3 | -1 | 1,896296 | 1.107,82 |
| 2.048 | 1.125 | Doppelt verminderte Oktave | -2 | -3 | 1,820444 | 1.037,15 |
| 2.025 | 1.024 | Große übermäßige Septime | 4 | 2 | 1,977539 | 1.180,45 |
| 125 | 64 | Kleine übermäßige Septime | 0 | 3 | 1,953125 | 1.158,94 |
| 625 | 324 | "Kleine" kleine übermäßige Septime | -4 | 4 | 1,929012 | 1.137,43 |
| 243 | 128 | Pythagoreische große Septime | 5 | 0 | 1,898438 | 1.109,78 |
| 15 | 8 | **Natürliche große Septime** | 1 | 1 | 1,875000 | 1.088,27 |
| 50 | 27 | "Kleine" große Septime | -3 | 2 | 1,851852 | 1.066,76 |
| 9 | 5 | **Natürliche kleine Septime** | 2 | -1 | 1,800000 | 1.017,60 |
| 16 | 9 | Pythagoreische kleine Septime | -2 | 0 | 1,777778 | 996,09 |
| 216 | 125 | Große verminderte Septime | 3 | -3 | 1,728000 | 946,92 |
| 128 | 75 | Kleine verminderte Septime | -1 | -2 | 1,706667 | 925,42 |
| 225 | 128 | Große übermäßige Sexte | 2 | 2 | 1,757813 | 976,54 |
| 125 | 72 | Kleine übermäßige Sexte | -2 | 3 | 1,736111 | 955,03 |
| 27 | 16 | Pythagoreische große Sexte | 3 | 0 | 1,687500 | 905,87 |
| 5 | 3 | **Natürliche große Sexte** | -1 | 1 | 1,666667 | 884,36 |
| 8 | 5 | **Natürliche kleine Sexte** | 0 | -1 | 1,600000 | 813,69 |
| 128 | 81 | Pythagoreische kleine Sexte | -4 | 0 | 1,580247 | 792,18 |
| 192 | 125 | Große verminderte Sexte | 1 | -3 | 1,536000 | 743,01 |
| 1024 | 675 | Kleine verminderte Sexte | -3 | -2 | 1,517037 | 721,51 |
| 3375 | 2.048 | Doppelt übermäßige Quinte | 3 | 3 | 1,647949 | 864,81 |
| 405 | 256 | Große übermäßige Quinte | 4 | 1 | 1,582031 | 794,13 |
| 25 | 16 | Kleine übermäßige Quinte | 0 | 2 | 1,562500 | 772,63 |
| 243 | 160 | Scharfe Quinte | 5 | -1 | 1,518750 | 723,46 |
| 3 | 2 | **Quinte** | 1 | 0 | 1,500000 | 701,96 |
| 40 | 27 | Ernste Quinte | -3 | 1 | 1,481481 | 680,45 |
| 36 | 25 | Große verminderte Quinte | 2 | -2 | 1,440000 | 631,28 |
| 64 | 45 | Kleine verminderte Quinte | -2 | -1 | 1,422222 | 609,78 |
| 512 | 375 | Doppelt verminderte Quinte | -1 | -3 | 1,365333 | 539,10 |

***Intervalle - klassische Quinten-Terzen-Stimmung - Teil II***

**Abb. 17** zeigt die Intervalle der klassischen Quinten-Terzen-Stimmung in der Übersicht ab der doppelt verminderten Quinte bis zur Oktave (Fortsetzung von vorhergehender Abbildung). Die Farbzuordnungen entsprechen denen auf der Abb. 16.

Die Abb. 17 ist vorzugsweise von unten nach oben zu lesen – in Abb. 16 (Teil 1) sind die kleinen Intervalle oben, die großen Intervalle unten, hier in der Abb. 17 (Teil 2) sind die kleinen Intervalle unten und die großen Intervalle oben. Diese Art der Darstellung vermittelt die symmetrische Struktur der Intervalle auf einen Blick, wenn beide Abbildungen gleichzeitig (nebeneinander) betrachtet werden.

Die „scharfe“ Quinte wird auch „akute“ Quinte genannt, wie auch die „scharfe“ Quarte auch „akute“ Quarte genannt wird, so z.B. in: Hans Kayser: Orphikon – eine harmonikale Symbolik, Hrsg. Julius Schwabe, Basel und Stuttgart 1973.

### 1.4.6 Kleine und große Diesis, syntonisches Komma, Schisma und Diaschisma

Die **kleine Diesis** ist das Restintervall, das aus drei natürlichen großen Terzen und einer Oktave gebildet wird. Das Intervallfrequenzverhältnis vom Grundton zur natürlichen großen Terz beträgt $5/4 = 5^1/2^2 = 2^{-2} \times 5^1$. Drei Terzen führen somit zum Intervallfrequenzverhältnis von $5^3/4^3 = 5^3/2^6 = 2^{-6} \times 5^3$. Da die kleine Diesis aus dem Intervall Oktave minus drei große Terzen gebildet wird, lautet der Stimmschlüssel logischerweise: +1 O; -3 T und es gilt der folgende mathematische Zusammenhang:

Oktave – 3 natürliche große Terzen = kleine Diesis

$$2^1 / (2^{-6} \times 5^3) = 2^1 \times (2^{-6} \times 5^3)^{-1} = 2^1 \times (2^6 \times 5^{-3}) = 2^7 \times 5^{-3}$$

$$2^7 \times 5^{-3} = 128 \times 125^{-1} = 128/125 = 1{,}024\ 000 \text{ (= 41,058 858 Cent)}$$

Jede einzelne mathematische Umformung wird hier genau aufgeführt, damit der auf diesem Gebiet nicht so bewanderte Leser leichter folgen kann und selbst jeden Schritt nachvollziehen kann.

Das Ergänzungsintervall zur kleinen Diesis (große verminderte Sekunde) ist die kleine übermäßige Septime. Diese hat das Intervallfrequenzverhältnis von $5^3/2^6$ = 125/64 = 1,953 125 (= 1.158,941142 Cent). Der Stimmschlüssel lautet: +3 T.

| **Intervall** | | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Natürliche große Terz | 5/4 | = | $2^{-2} \times 5^1$ | = | 1,250 000 | 386,314 |
| + natürliche große Terz | 5/4 | = | $2^{-2} \times 5^1$ | = | 1,250 000 | 386,314 |
| = kleine überm. Quinte | 25/16 | = | $2^{-4} \times 5^2$ | = | 1,562 500 | 772,627 |

| **Intervall** | | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kleine überm. Quinte | 25/16 | = | $2^{-4} \times 5^2$ | = | 1,562 500 | 772,627 |
| + natürliche große Terz | 5/4 | = | $2^{-2} \times 5^1$ | = | 1,250 000 | 386,314 |
| = kleine überm. Septime | 125/64 | = | $2^{-6} \times 5^3$ | = | 1,953 125 | 1.158,981 |

| **Intervall** | | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Oktave | 2/1 | = | $2^1 \times 5^0$ | = | 2,000 000 | 1.200,000 |
| – kleine überm. Septime | 125/64 | = | $2^{-6} \times 5^3$ | = | 1,953 125 | 1.158,981 |
| = kleine Diesis | 128/125 | = | $2^7 \times 5^{-3}$ | = | 1,024 000 | 41,059 |

Die kleine übermäßige Quinte (25/16) ist um ein kleines Chroma (25/24) größer als die reine Quinte (3/2) (772,627 Cent – 701,955 Cent = 70,672 Cent). Die kleine übermäßige Septime ist um ein kleines Chroma größer als die natürliche große Septime (1.088,269 Cent + 70,672 Cent = 1.158,941 Cent).

Die **große Diesis** ist das Restintervall, das aus vier natürlichen kleinen Terzen und einer Oktave gebildet wird. Das Intervallfrequenzverhältnis vom Grundton zur natürlichen kleinen Terz (Moll-Terz) beträgt $6/5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^{-1}$. Vier kleine Terzen führen somit zum Intervallfrequenzverhältnis von $2^4 \times 3^4 \times 5^{-4}$. Da die große Diesis aus dem Intervall von vier kleinen Terzen minus eine Oktave gebildet wird, lautet der Stimmschlüssel: -1 O; +4 Q; -4 T. Mathematisch gilt der folgende Zusammenhang:

Vier natürliche kleine Terzen – Oktave = große Diesis

$$(2^4 \text{ x } 3^4 \text{ x } 5^{-4}) \text{ x } 2^{-1} = 2^3 \text{ x } 3^4 \text{ x } 5^{-4} = (8 \text{ x } 81) / 625 = 648/625 = 1{,}036\,800 \text{ (= 62,565 148 Cent)}$$

Das Ergänzungsintervall zur großen Diesis („große" große verminderte Sekunde) ist die „kleine" kleine übermäßige Septime. Die Bezeichnungsweise wird später noch genauer erläutert. Diese „kleine" kleine übermäßige Septime hat das Intervallfrequenzverhältnis von $2^{-2}$ x $3^{-4}$ x $5^4$ = 625/324 = 1,929 012 (= 1.137,434 852). Der Stimmschlüssel lautet: +2 O; -4 Q; +4 T.

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Natürliche kleine Terz | 6/5 | = | $2^1$ x $3^1$ x $5^{-1}$ | = | 1,200 000 | 315,641 |
| + natürliche kleine Terz | 6/5 | = | $2^1$ x $3^1$ x $5^{-1}$ | = | 1,200 000 | 315,641 |
| = große vermind. Quinte | 36/25 | = | $2^2$ x $3^2$ x $5^{-2}$ | = | 1,440 000 | 631,283 |

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Große vermind. Quinte | 36/25 | = | $2^2$ x $3^2$ x $5^{-2}$ | = | 1,440 000 | 631,283 |
| + natürliche kleine Terz | 6/5 | = | $2^1$ x $3^1$ x $5^{-1}$ | = | 1,200 000 | 315,641 |
| = große vermind. Septime | 216/125 | = | $2^3$ x $3^3$ x $5^{-3}$ | = | 1,728 000 | 946,924 |

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Große vermind. Septime | 216/125 | = | $2^3$ x $3^3$ x $5^{-3}$ | = | 1,728 000 | 946,924 |
| + natürliche kleine Terz | 6/5 | = | $2^1$ x $3^1$ x $5^{-1}$ | = | 1,200 000 | 315,641 |
| = Okt. + große Diesis | 1.296/625 | = | $2^4$ x $3^4$ x $5^{-4}$ | = | 2,073 600 | 1.262,565 |

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Oktave + große Diesis | 1.296/625 | = | $2^4$ x $3^4$ x $5^{-4}$ | = | 2,073 600 | 1.262,565 |
| – Oktave | 2/1 | = | $2^1$ x $3^0$ x $5^0$ | = | 2,000 000 | 1.200,000 |
| = Große Diesis | 648/625 | = | $2^3$ x $3^4$ x $5^{-4}$ | = | 1,036 800 | 62,565 |

Die große verminderte Quinte ist um ein kleines Chroma (25/24) kleiner als die natürliche reine Quinte (631,283 Cent + 70,672 Cent = 701,955 Cent). Die große verminderte Septime ist um ein kleines Chroma kleiner als die natürliche kleine Septime (946,924 Cent + 70,672 Cent = 1.017,596 Cent).

Das **syntonische Komma** ist das Kleinintervall, das den Raum zwischen einer *kleinen Diesis* und einer *großen Diesis* ausfüllt. Es ist auch das Intervall, das vom *kleinen Ganzton* zum *großen Ganzton* gebildet wird, wie auch das Intervall, das den Unterschied von einem *kleinen Chroma* und einem *großen Chroma* ausmacht.

Großer Ganzton – kleiner Ganzton = syntonisches Komma

$$2^{-3} \text{ x } 3^2 \text{ x } 5^0 / (2^1 \text{ x } 3^{-2} \text{ x } 5^1) = 2^{-4} \text{ x } 3^4 \text{ x } 5^{-1} = (9/8) / (10/9) = 81/80 = 1{,}012\,500 \text{ (= 21,506290 Cent)}$$

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|
| Große Diesis | 648/625 | = | $2^{3} \times 3^{4} \times 5^{-4}$ | = 1,036 800 | 62,565 |
| – kleine Diesis | 128/125 | = | $2^{7} \times 3^{0} \times 5^{-3}$ | = 1,024 000 | 41,059 |
| = syntonisches Komma | 81/80 | = | $2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$ | = 1,012 500 | 21,506 |

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|
| Großer Ganzton | 9/8 | = | $2^{-3} \times 3^{2} \times 5^{0}$ | = 1,125 800 | 203,910 |
| – kleiner Ganzton | 10/9 | = | $2^{1} \times 3^{-2} \times 5^{1}$ | = 1,111 111 | 182,404 |
| = syntonisches Komma | 81/80 | = | $2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$ | = 1,012 500 | 21,506 |

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|
| Großes Chroma | 135/128 | = | $2^{-7} \times 3^{3} \times 5^{1}$ | = 1,054 688 | 92,179 |
| – kleines Chroma | 25/24 | = | $2^{-3} \times 3^{-1} \times 5^{2}$ | = 1,041 667 | 70,672 |
| = syntonisches Komma | 81/80 | = | $2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$ | = 1,012 500 | 21,506 |

Das syntonische Komma spielt in der Stimmtechnik und für die Berechnung von verschiedenen Intervallen in den unterschiedlichsten Stimmungssystemen eine überaus wichtige Rolle. Außer dem ganzen syntonischen Komma, kommen auch ½, ¼ und ¾ des syntonischen Kommas zur Geltung.

| **Intervall** | | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|
| Syntonisches Komma | 81/80 | = | $2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$ | = 1,012 500 | 21,506 |
| ½ Syntonisches Komma | | | $2^{-2} \times 3^{2} \times 5^{-(1/2)}$ | = 1,006 231 | 10,753 |
| ¼ Syntonisches Komma | | | $2^{-1} \times 3^{1} \times 5^{-(1/4)}$ | = 1,003 110 | 5,377 |
| ¾ Syntonisches Komma | | | $2^{-3} \times 3^{3} \times 5^{-(3/4)}$ | = 1,009 360 | 16,130 |

In der **mitteltönigen Stimmung** sind 11 von 12 Quinten sowie 9 von 12 kleinen Terzen jeweils um ¼ syntonisches Komma kleiner als die entsprechenden natürlichen Intervalle. Der mitteltönige Ganzton ist um ½ syntonisches Komma kleiner als der große Ganzton und somit ½ syntonisches Komma größer als der kleine Ganzton.

2 Oktaven + natürliche große Terz = 4 mitteltönige Quinten

$$2^{2} \times (2^{-2} \times 5^{1}) = 2^{0} \times 5^{1} = 5 \text{ (= 2.786,313 714 Cent)}$$

1 mitteltönige Quinte: $5^{(1/4)} = 1{,}495\ 349$ (= 696,578 428 Cent)

1 natürliche große Terz = 2 mitteltönige Ganztöne

$$2^{-2} \times 5^{1} = 1{,}250\ 000 \text{ (= 386,313 714 Cent)}$$

1 mitteltöniger Ganzton: $2^{-1} \times 5^{(1/2)} = 1{,}118\ 034$ = (= 193,156 857 Cent)

1 mitteltönige Quinte – 1 natürliche große Terz = 1 mitteltönige kleine Terz

$5^{(1/4)} \text{ x } (2^2 \text{ x } 5^{-1}) = 2^2 \text{ x } 5^{(-3/4)} = 1{,}196\ 279$ (= 310,264 715 Cent)

1 mitteltönige kleine Terz – 1 mitteltöniger Ganzton = 1 mitteltöniger großer Halbton

$(2^2 \text{ x } 5^{(-3/4)}) \text{ x } (2^1 \text{ x } 5^{(-1/2)}) = 2^3 \text{ x } 5^{(-5/4)}) = 1{,}069\ 984$ (= 117,107 858 Cent)

1 natürliche Große Terz – 1 mitteltönige kleine Terz = 1 mitteltöniger kleiner Halbton

$(2^{-2} \text{ x } 5^1) \text{ x } (2^{-2} \text{ x } 5^{(3/4)}) = 2^{-4} \text{ x } 5^{(7/4)} = 1{,}044\ 907$ (= 76,048 999 Cent)

Der mitteltönige kleine Halbton ist um 35,682 Cent kleiner als der diatonische Halbton (16/15). Die Größe dieses Differenzintervalls ist eine kleine Diesis – ¼ synton. Komma. Der mitteltönige große Halbton ist um ¼ syton. Komma (= 5,377 Cent) größer als der diatonische Halbton.

In der mitteltönigen Stimmung sind 8 von 12 großen Terzen rein, die restlichen 4 große Terzen sind um jeweils eine kleine Diesis (= 41,059 Cent) größer als die natürliche große Terz. Die mitteltönige Stimmung ist eine vornehmlich auf natürliche große Terzen bezogene Stimmung, so wie die pythagoreische Stimmung eine auf reine Quinten bezogene Stimmung ist. Die Intervalle der mitteltönigen Stimmung lassen sich alle mathematisch in der Form $2^{Exp}$ x $5^{Exp}$ beschreiben, so wie in der pythagoreischen Stimmung sich alle Intervalle in der Form $2^{Exp}$ x $3^{Exp}$ beschreiben lassen, nur mit dem großen Unterschied, daß in der mitteltönigen Stimmung gebrochene Exponenten vorkommen und in der pythagoreischen Stimmung nur ganzzahlige.

| Ton-stufe | Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis 2 | Basis 5 | Intervallname | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|
| C | 0 | 0 | Prime | 1,000000 | 0,000 |
| C# | -4 | 7/4 | Mitteltöniger kleiner Halbton | 1,044907 | 76,049 |
| D | -1 | 1/2 | Mitteltöniger Ganzton | 1,118034 | 193,157 |
| Eb | 2 | -3/4 | Mitteltönige kleine Terz | 1,196279 | 310,265 |
| E | -2 | 1 | Natürliche große Terz | 1,250000 | 386,314 |
| F | 1 | -1/4 | Mitteltönige Quarte | 1,337481 | 503,422 |
| F# | -3 | 3/2 | Mitteltöniger Tritonus | 1,397542 | 579,471 |
| G | 0 | 1/4 | Mitteltönige Quinte | 1,495349 | 696,578 |
| G# | -4 | 2 | Mitteltönige kleine Sexte | 1,562500 | 772,627 |
| A | -1 | 3/4 | Mitteltönige große Sexte | 1,671851 | 889,735 |
| Bb | 2 | -1/2 | Mitteltönige kleine Septime | 1,788854 | 1.006,843 |
| B | -2 | 5/4 | Mitteltönige große Septime | 1,869186 | 1.082,892 |
| c | 1 | 0 | Oktave | 2,000000 | 1.200,000 |

Die Quinten von allen Tonstufen aus sind um ¼ synton. Komma kleiner als die reine Quinte, einzige Ausnahme ist die Quinte vom $G^{\#}$ zum $B_b$, die 35,682 Cent (kleine Diesis – ¼ synton. Komma) größer ist als eine reine Quinte.

In der mitteltönigen Sstimmung sind alle natürlichen großen Terzen rein, ausgenommen die folgenden vier großen Terzen: $C^{\#}$ - F, $F^{\#}$ - $B_b$, $G^{\#}$ - c und B - $e_b$, die um 41,059 Cent größer sind als die natürliche große Terz. Die Dur-Tonarten vom C, B, $B_b$ sowie vom G, D und A aus ergeben sehr wohlklingende Tonleitern und schöne klare Akkorde wie sie kaum in einem anderen Stimmungssystem hörbar sind.

In der von dem Musiktheoretiker und Komponisten Johann Philipp Kirnberger (1721-1783) entwickelten „Kirnberger-Stimmung“ sind 7 Quinten rein, 4 Quinten um ¼ syntonisches Komma verstimmt und eine Quinte um ein Schisma verstimmt. Das Schisma ist das nächste wichtige Kleinintervall, das uns hier beschäftigen wird.

Der Begriff **Schisma** wird heute allgemein gebraucht zur Beschreibung einer Kirchenspaltung aus kirchenrechtlichen und nicht aus dogmatischen Gründen. Der Begriff Schisma stammt ursprünglich von dem griechischen Verb *schiso* „spalten“ ab. In der Musikwissenschaft ist das Schisma das kleinste gebräuchliche Intervall. Es ist etwas kleiner als 1/100 eines Ganztones.

Das Schisma ist das Intervall, das zwischen einem pythagoreischen und einem syntonischen Komma liegt.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pythagoreischess Komma | 531441/523288 | = | $2^{-19} \times 3^{12} \times 5^{0}$ | = | 1,013 643 | 23,460 |
| – syntonisches Komma | 81/80 | = | $2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$ | = | 1,012 500 | 21,506 |
| = Schisma | 32805/32768 | = | $2^{-15} \times 3^{8} \times 5^{1}$ | = | 1,001 129 | 1,954 |

Das Schisma ist etwas kleiner als 1/12 des pythagoreischen Kommas, das den Unterschied einer gleichmäßigen und einer natürlichen reinen Quinte ausmacht. In der „Kirnberger-Stimmung“ hat die Quinte auf dem Tritonus Fis - cis den Centwert 700,001 281, wenn die Grundstimmung auf ein C geeicht ist. (Reine Quinte – Schisma = 701,955 001 Cent – 1,953 720 Cent = 700,001 281 Cent). Der Stimmschlüssel für das Schisma ist: -5 O; + 8Q; +1 T.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| 1/12 pythagoreischess Komma | $2^{(-19/12)} \times 3^{1} \times 5^{0}$ | = | 1,001 129 891 | 1,955 001 |
| – Schisma | $2^{-15} \times 3^{8} \times 5^{1}$ | = | 1,001 129 150 | 1,953 720 |
| = Differenz | $2^{(161/12)} \times 3^{-7} \times 5^{-1}$ | = | 1,000 000 739 | 0,001 281 |

Dieser kleine Unterschied hat nur theoretischen Wert, da man ihn mit dem Ohr nicht wahrnehmen kann. Man bedenke, daß 1 Cent 1/100 eines gleichmäßigen Halbtonschrittes ausmacht, 0,001 Cent somit 1/100 000 eines gleichmäßigen Halbtonschrittes. Um jedoch die harmonikale Struktur eines Stimmungssystems zu erkennen, ist es bedeutungsvoll zu wissen, ob eine Quinte zum Beispiel um ein Schisma oder um 1/12 des pythagoreischen Kommas verstimmt ist.

Das **Diaschisma** ist das Differenzintervall zwischen einem syntonischen Komma und einem Schisma. Das Diaschisma ist ebenso des Intervall, das aus dem diatonischen Halbton (16/15) und dem großen Chroma (135/128) gebildet wird.

Das Diaschisma erscheint als Differenzintervall in der Stimmung von Leonhard Euler in mehreren Quinten wie auch in der Stimmung von Johannes Kepler im Bereich der Quinten, großen Terzen und Ganztöne. In der „Kirnberger-Stimmung“ erscheint das Diaschisma bei der Verstimmung der großen und kleinen Terzen und beim Halbtonschritt.

Der Stimmschlüssel zum Diaschisma ist: +3 O; -4 Q; -2 T.

Diatonischer Halbton – großes Chroma = Diaschisma

$$(2^{4} \times 3^{-1} \times 5^{-1}) \times (2^{7} \times 3^{-3} \times 5^{-1}) = 2^{11} \times 3^{-4} \times 5^{-2} = 2.048/2.025 = 1{,}011\ 358\ (= 19{,}552\ 569\ \text{Cent})$$

Schisma und Diaschisma erscheinen bei den Verstimmungen der verschiedenen Stimmungssysteme oft auch in Kombination mit anderen „kleinen Intervallen“. Eine Zusammenstellung der häufigsten Verstimmungen sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

| Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis 2 | 3 | 5 | Intervallname | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | Prime | 1,000000 | 0,000 |
| -15 | 8 | 1 | Schisma | 1,001129 | 1,954 |
| -19/12 | 1 | 0 | 1/12 pythagoreisches Komma | 1,001130 | 1,955 |
| 41/4 | -5 | -1 | K1* | 1,002262 | 3,911 |
| -1 | 1 | -1/4 | 1/4 syntonisches Komma | 1,003110 | 5,377 |
| -19/4 | 3 | 0 | 1/4 pythagoreisches Komma | 1,003394 | 5,865 |
| 11/2 | -2 | -1 | K2* | 1,005663 | 9,776 |
| -2 | 2 | -1/2 | 1/2 syntonisches Komma | 1,006231 | 10,753 |
| -19/2 | 6 | 0 | 1/2 pythagoreisches Komma | 1,006799 | 11,730 |
| 3/4 | 1 | -1 | K3* | 1,009076 | 15,641 |
| -3 | 3 | -3/4 | 3/4 syntonisches Komma | 1,009360 | 16,130 |
| -57/4 | 9 | 0 | 3/4 pythagoreisches Komma | 1,010215 | 17,595 |
| 11 | -4 | -2 | Diaschisma | 1,011358 | 19,553 |
| -4 | 4 | -1 | Syntonisches Komma | 1,012500 | 21,506 |
| -19 | 12 | 0 | Pythagoreisches Komma | 1,013643 | 23,460 |
| 8 | -1 | -11/4 | K4* | 1,020825 | 35,682 |
| 7 | 0 | -3 | Kleine Diesis | 1,024000 | 41,059 |
| 6 | 1 | -13/4 | K5* | 1,027185 | 46,435 |
| 3 | 4 | -4 | Große Diesis | 1,036800 | 62,565 |
| -3 | -1 | 2 | Kleines Chroma | 1,041667 | 70,672 |
| 8 | -5 | 0 | Pythagoreisches Limma | 1,053498 | 90,225 |
| -7 | 3 | 1 | Großes Chroma | 1,054688 | 92,179 |
| 4 | -1 | -1 | Diatonischer Halbton | 1,066667 | 111,731 |
| -11 | 7 | 0 | Pythagoreische Apotome | 1,067871 | 113,685 |

*

K1 = 1/4 pyth. Komma - Schisma = syntonisches Komma - 3/4 pyth. Komma
K2 = 1/2 pyth. Komma - Schisma = syntonisches Komma - 1/2 pyth. Komma
K3 = 3/4 pyth. Komma - Schisma = syntonisches Komma - 1/4 pyth. Komma
K4 = Kleine Diesis - 1/4 syntonisches Komma
K5 = Kleine Diesis + 1/4 syntonisches Komma

Die oben stehende Tabelle zeigt die Exponenten, mit denen die Zahlen 2, 3 und 5 potenziert werden müssen, um die Einzelfaktoren der Intervallfaktoren der jeweiligen Intervalle zu erhalten. Beispiel: das Intervall „¼ pythagoreisches Komma“ hat den Exponenten –19/4 zur Basis 2, den Exponenten 3 zur Basis 3 und den Exponenten 0 zur Basis 5. Dies führt zum Intervallfaktor $2^{(-19/4)}$ x $3^3$ x $5^0$ = 1,003 394. Weiteres Beispiel: Das große Chroma hat den Exponenten –7 zur Basis 2, den Exponenten 3 zur Basis 3 und den Exponenten 1 zur Basis 5. Dies führt zum Intervallfaktor $2^{-7}$ x $3^3$ x $5^1$ = 1,054 688.

Für nicht geübte Mathematiker (genauer: Arithmetiker) nochmals ein paar Beispiele zum näheren Verständnis:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2^2$ = 4 | $2^{-2}$ = 1/4 | $2^{(1/2)}$ = 1,414 213 ... = Quadratwurzel aus 2 | $2^{(-1/2)}$ = 1/1,414 213 ... |
| $5^3$ = 125 | $5^{-3}$ = 1/125 | $5^{(1/3)}$ = 1,709 975 ... = Dritte Wurzel aus 5 | $5^{(-1/3)}$ = 1/1,709 975 ... |

## 1.5 Intervalle – Naturseptimen (reine natürliche Septimen)

Der 7. Teilton führt zur reinen Septime (reine Naturseptime) in der Bioktave. Für das an europäische Musik gewohnte Ohr klingt diese reine Septime melodisch etwas zu tief, im Rahmen eines Akkords jedoch sehr wohlklingend. Spielt man beispielsweise den 4., 5., 6., 7. und 8. Teilton hintereinander, so scheint für das musikalisch europäisch geprägte Musikempfinden die reine Septime schief zu klingen, spielt man jedoch diese 5 Teiltöne gleichzeitig, so empfindet man diesen reinen Septimakkord als sehr klaren und schönen Wohlklang. In der Bioktave erklingt der

4. Teilton als Prime
5. Teilton als natürliche große Terz
6. Teilton als reine Quinte
7. Teilton als reine Septime (Naturseptime)
8. Teilton als Oktave.

Blasinstrumente erzeugen stark ausgeprägte Teiltonreihen, wobei auch der 7. Teilton sehr deutlich in Erscheinung tritt. Bei einer zart angeblasenen Posaune (Posaune: *piano*) erklingt der 7. Teilton um ein Vielfaches schwächer (viermal schwächer) als der Grundton (1. Teilton) und etwa gleich stark wie der 3. Teilton (Duodezime = Quinte in der ersten Oberoktave). Bei einer sehr stark angeblasenen Posaune (Posaune: *forte*) erklingt der 7. Teilton wesentlich stärker als der Grundton (mehr als das Anderthalbfache) und mehr als dreimal so stark (das 3½-fache) wie der 3. Teilton. Die Posaune ist deshalb ein Instrument, mit dem man die reine Septime (Naturseptime) sehr leicht erzeugen (spielen) kann. Die folgende Tabelle zeigt die relativen Intensitäten (Amplituden) der ersten zehn Teiltöne, wie sie in einer leicht und in einer stark angeblasenen Posaune entstehen.

| **Teilton** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Relative Amplitude | 80 | 45 | 20 | 75 | 76 | 28 | 20 | 30 | 22 | 10 | Posaune: *piano* |
| | 80 | 70 | 37 | 140 | 95 | 93 | 130 | 90 | 180 | 115 | Posaune: *forte* |

Quelle: Wolfgang Martin Stroh: Akustik, Instrumentenkunde, neue Technologien, Tonsysteme. Ein Skriptum aus den Erfahrungen im Lehrbetrieb des Faches Musik (Fachbereich 2 Kommunikation/Ästhetik) der Carl v. Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg 1991, S. 46

In der klassischen europäischen Musiktradition endet der angewandte Tonraum zur Bestimmung der Intervallgrößen mit dem 6. Teilton (Quinte in der Bioktave); die große Terz (der 5. Teilton) ist dabei das tonal bestimmende Intervall. Die höheren Teiltöne bleiben im klassischen Satz gewöhnlich völlig ausgeblendet: Die Naturseptime (7. Teilton) wird in ihrer Eigentümlichkeit nur hin und wieder in der Pop- und Rockmusik genutzt; der 11. Teilton findet nur in der alpenländischen und südeuropäischen Volksmusik sowie in der außereuropäischen Musik Anwendung. [Vergl. Abschnitt 1.6 ab Seite 56]

Da Naturhörner und -trompeten keine Grifflöcher, Klappen, Ventile oder Züge haben, kann auf ihnen nur die Naturtonreihe gespielt werden. Das Alphorn ist ein Naturtoninstrument, das heißt der Tonvorrat beschränkt sich auf die untemperierte Naturtonreihe, die sich in ganzzahligen Schwingungsverhältnissen über einem Grundton aufbaut. Die unterschiedlichen Töne werden ausschließlich durch gleichzeitige Veränderung der Lippenspannung und des Zwerchfelldrucks erzeugt. Alphornbläser erreichen auf ihren Instrumenten 11-16 dieser Naturtöne. Die charakteristischen, weil von unseren temperierten Hörgewohnheiten am stärksten abweichenden Töne sind die so genannte Naturseptime (der 7. Oberton, ein zu tiefes b) und das so genannte Alphorn-Fa (der 11. Oberton, ein seltsam zwischen f und fis schwebender Ton). [Vergl. Abschnitt 1.6 ab Seite 56]

**Der Begriff *natürliche Septime* [*natürliche kleine Septime* (9/5), *natürliche große Septime* (15/8)] dient zur Unterscheidung von *pythagoreischen Septimen* [*pythagoreische kleine Septime* (16/9), *pythagoreische große Septime* (243/128)], hat jedoch keinen Bezug zur *Naturseptime* (7/4).**

### 1.5.1 Intervallerzeugung – Naturseptimen (reine natürliche Septimen)

Die folgende Abbildung zeigt den Stimmschlüssel für die Naturseptime, die Doppeltseptime (doppelte Naturseptime) und die Dreifachseptime (dreifache Naturseptime) sowie für die Differenzintervalle, die zu den Oktaven entstehen.

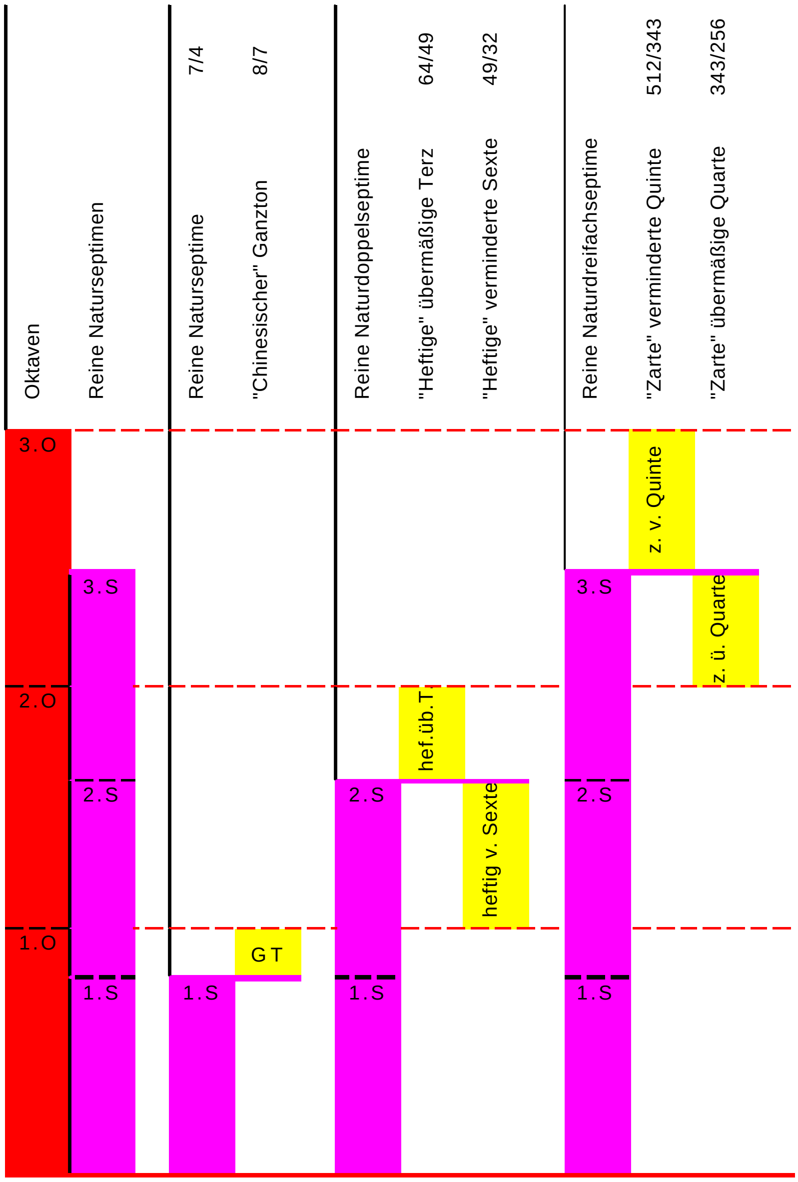



**Abb. 18** zeigt die Intervalle, die mittels Naturseptimen und Oktaven eingestimmt werden können. In roter Farbe ist die Oktave markiert, in violetter Farbe die Naturseptimen und in gelber Farbe die zu erzielenden Intervalle. Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder unten eine der beiden rot gestrichelten Linie berühren, werden durch Septimschritte nach oben (aufsteigende Naturseptimen) erzielt, Intervalle, deren in gelber Farbe markierten Felder oben eine der beiden rot gestrichelten Linie berühren, werden durch Septimschritte nach unten (absteigende Naturseptimen) erzielt. Beispiel: die „heftige“ übermäßige große Terz (septimale heftig übermäßige Terz) wird eingestimmt, indem man zwei Naturseptimen nach unten stimmt und dann zwei Oktavsprünge nach oben, die „heftige“ verminderte kleine Sexte (septimale heftig verminderte kleine Sexte) hingegen durch zwei Naturseptimsprünge nach oben und einen Oktavsprung nach unten.

Der *chinesische Ganzton* (septimale leicht übermäßige große Sekunde) ist das Ergänzungsintervall der Naturseptime zur Oktave. Der Name *„chinesischer Ganzton“* rührt von der Tatsache her, daß in der traditionellen chinesischen Musik die Naturseptime ihren festen Platz in den angewandten Harmonien hat und demzufolge ist auch das entsprechende Ergänzungsintervall fest in der chinesischen Harmoniestruktur integriert.

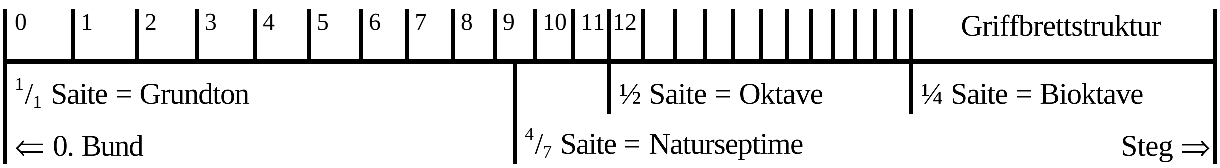
### 1.5.2 Das Einstimmen der Naturseptime

Das Einstimmen der Naturseptime erfordert etwas mehr Geschicklichkeit und Übung als das Stimmen von Oktaven, Quinten und Terzen. Dies liegt an der Tatsache, daß gewohnheitsmäßig Instrumente zumeist mittels Quintensprünge gestimmt werden, da sich die hier zu Lande gebräuchliche 12-stufige Tonleiter am Quintenzirkel orientiert. Das Einstimmen von diatonischen, mitteltönigen und wohltemperierten Stimmungen erfordert neben Quintensprünge auch die Verwendung von reinen Dur-Terzen. Die Naturseptime wird in diesen Stimmungssystemen durch andere Intervalle substituiert, so vor allem durch die sogenannte natürliche kleine Septime (9/5 – zwei Quinten hoch und eine Terz runter) und durch die natürliche große Septime (15/8 – eine Quinte hoch und eine Terz hoch). Obwohl man diese Septimen „natürlich“ nennt, handelt es sich hier nicht um Naturseptimen.

Die Naturseptime erklingt niedriger als die „klassischen“ Septimen, die wir gewohnt sind zu hören, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnisse** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| Pythagoreische große Septime | 243/128 | = | 1,898 437 | 1.109,775 004 |
| Gleichmäßige große Septime | $2^{(11/12)}$ | = | 1,887 749 | 1.100,000 000 |
| Natürliche große Septime | 15/8 | = | 1,875 000 | 1.088,258 715 |
| Natürliche kleine Septime | 9/5 | = | 1,800 000 | 1.017,596 288 |
| Gleichmäßige kleine Septime | $2^{(10/12)}$ | = | 1,781 797 | 1.000,000 000 |
| Pythagoreische kleine Septime | 16/9 | = | 1,777 778 | 996,089 998 |
| Naturseptime | 7/4 | = | 1,750 000 | 968,825 906 |

Um den 7. Teilton (Naturseptime in der Bioktave) auf einer Gitarre als Flageolett-Ton zum Erklingen zu bringen, muß man die Saite entweder bei 1/7 oder 2/7 oder 3/7 oder 4/7 und so weiter leicht andrücken und dann die Saite anzupfen. Der 4/7-Punkt liegt zwischen dem 9. und 10 Bund, wobei er etwas näher am 10 Bund und etwas weiter weg vom 9. Bund liegt (am 9. Bund wird normalerweise die gleichmäßige große Sexte abgegriffen und am 10. Bund die gleichmäßige kleine Septime). Zwischen dem 10. und 11. Bund findet man beim Abtasten der Saite und gleichzeitigem stetigem Anzupfen ganz dicht am 10. Bund den 9. Teilton (pythagoreische große Sekunde in der Bioktave) und zwischen dem 8. und 9. Bund ganz dicht am 8. Bund den 8. Teilton (Trioktave). Dies sind die in der Nachbarschaft der Naturseptime (in der Bioktave) auf der Saite am leichtesten zu findende Punkte, auf denen man kräftige Flageolett-Töne erzeugen kann.




**Stimmtechnischer Hinweis**

Die Naturseptime erklingt in der Grundoktave mit der 1,75-fachen Frequenz des Grundtones. Der 4. Teilton der Naturseptime (Bioktave der Naturseptime) erklingt mit der 1,75 x 4 = 7-fachen Frequenz des Grundtones. Der 4. Teilton der Naturseptime erklingt in der gleichen Frequenz wie der 7. Teilton des Grundtones. Wenn diese beiden Teiltöne schwebungsfrei zusammenklingen, dann ist die Naturseptime genau gestimmt.

### 1.5.3 Die Intervallfaktoren und Centwerte der septimalen Intervalle

Die septimalen Intervalle lassen sich durch ganzzahlige (positive und negative) Exponenten zu den Basiszahlen 2, 3, 5 und 7 ausdrücken. In den folgenden Tabellen sind diese Strukturen (Exponenten, Intervallfaktoren und Centwerte) der wichtigsten septimalen Intervalle ersichtlich.

#### Aufsteigende Quinten und Naturseptimen

| Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis 2 | 3 | 5 | 7 | Intervallname (Beschreibung siehe unten) s. = septimale | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | Prime | 1,000000 | 0,000 |
| -2 | 0 | 0 | 1 | Naturseptime | 1,750000 | 968,826 |
| 3 | 0 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige gr. Sekunde | 1,142857 | 231,174 |
| -5 | 0 | 0 | 2 | s. übermäßge Quinte | 1,531250 | 737,652 |
| 6 | 0 | 0 | -2 | s.verminderte Quarte | 1,306122 | 462,348 |
| -8 | 0 | 0 | 3 | s. zart übermäßige Quarte | 1,339844 | 506,478 |
| 9 | 0 | 0 | -3 | s. zart verminderte Quinte | 1,492711 | 693,522 |
| -4 | 1 | 0 | 1 | s. leicht verminderte Quarte | 1,312500 | 470,781 |
| 2 | 1 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige gr. Sexte | 1,714286 | 933,129 |
| -7 | 1 | 0 | 2 | s. übermäßige gr. Sekunde | 1,148438 | 239,607 |
| 5 | 1 | 0 | -2 | s. verminderte Oktave | 1,959184 | 1.164,303 |
| -10 | 1 | 0 | 3 | s. zart übermäßige Prime | 1,004883 | 8,433 |
| 7 | 1 | 0 | -3 | s. zart verminderte gr. Sekunde | 1,119534 | 195,477 |
| -5 | 2 | 0 | 1 | s. leicht verminderte Oktave | 1,968750 | 1.172,736 |
| 0 | 2 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige gr. Terz | 1,285714 | 435,084 |
| -8 | 2 | 0 | 2 | s. übermäßige große Sexte | 1,722656 | 941,562 |
| 3 | 2 | 0 | -2 | s. verminderte Quinte (Tritonus) | 1,469388 | 666,258 |
| -11 | 2 | 0 | 3 | s. zart übermäßige Quinte | 1,507324 | 710,388 |
| 6 | 2 | 0 | -3 | s. zart verminderte gr. Sexte | 1,679300 | 897,432 |
| -7 | 3 | 0 | 1 | s. leicht verminderte Quinte | 1,476563 | 674,691 |
| -1 | 3 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige gr. Septime | 1,928571 | 1.137,039 |
| -10 | 3 | 0 | 2 | s. übermäßige gr. Terz | 1,291992 | 443,517 |
| 1 | 3 | 0 | -2 | s. verminderte gr. Sekunde | 1,102041 | 168,213 |
| -13 | 3 | 0 | 3 | s. zart übermäßige kl. Sekunde | 1,130493 | 212,343 |
| 4 | 3 | 0 | -3 | s. zart verminderte gr. Terz | 1,259475 | 399,387 |
| -9 | 4 | 0 | 1 | s. leicht verminderte gr. Sekunde | 1,107422 | 176,646 |
| -3 | 4 | 0 | -1 | s. überheftig verminderte Quinte | 1,446429 | 638,994 |
| -11 | 4 | 0 | 2 | s. übermäßige gr. Septime | 1,937988 | 1.145,472 |
| 0 | 4 | 0 | -2 | s. verminderte gr. Sexte | 1,653061 | 870,168 |
| -14 | 4 | 0 | 3 | s. zart übermäßige gr. Sexte | 1,695740 | 914,298 |
| 3 | 4 | 0 | -3 | s. zart verminderte gr. Septime | 1,889213 | 1.101,342 |

Diese septimalen Intervalle unterscheiden sich wie folgt von den pythagoreischen respektive reinen Intervallen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| zart verminderte | -8,433 Cent | zart übermäßige | +8,433 Cent |
| leicht verminderte | -27,264 Cent | leicht übermäßige | +27,264 Cent |
| verminderte | -35,697 Cent | übermäßige | +35,697 Cent |
| heftig verminderte | -54,528 Cent | heftig übermäßige | +54,528 Cent |
| überheftig verminderte | -62,961 Cent | überheftig übermäßige | +62,961 Cent |

## Absteigende Quinten und Naturseptimen

| Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis 2 | 3 | 5 | 7 | Intervallname (Beschreibung siehe unten) s. = septimale | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 1 | s. leicht verminderte kl. Terz | 1,166667 | 266,871 |
| 5 | -1 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige Quinte | 1,523810 | 729,219 |
| -4 | -1 | 0 | 2 | s. übermäßige Prime | 1,020833 | 35,697 |
| 8 | -1 | 0 | -2 | s. verminderte kl. Septime | 1,741497 | 960,393 |
| -6 | -1 | 0 | 3 | s. zart übermäßige kl. Septime | 1,786458 | 1.004,523 |
| 11 | -1 | 0 | -3 | s. zart verminderte Oktave | 1,990282 | 1.191,567 |
| 1 | -2 | 0 | 1 | s. leicht verminderte kl. Sexte | 1,555556 | 764,916 |
| 6 | -2 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige Prime | 1,015873 | 27,264 |
| -2 | -2 | 0 | 2 | s. übermäßige Quarte | 1,361111 | 533,742 |
| 9 | -2 | 0 | -2 | s. verminderte kl. Terz | 1,160998 | 258,438 |
| -5 | -2 | 0 | 3 | s. zart übermäßige kl.Terz | 1,190972 | 302,568 |
| 12 | -2 | 0 | -3 | s. zart verminderte Quarte | 1,326855 | 489,612 |
| 2 | -3 | 0 | 1 | s. überheftige übermäßige Prime | 1,037037 | 62,961 |
| | | | = | s. leicht verminderte kl. Sekunde | | |
| 8 | -3 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige Quarte | 1,354497 | 525,309 |
| 0 | -3 | 0 | 2 | s. übermäßige kl. Septime | 1,814815 | 1.031,787 |
| 11 | -3 | 0 | -2 | s. verminderte kl. Sexte | 1,547997 | 756,483 |
| -3 | -3 | 0 | 3 | s. zart übermäßige kl. Sexte | 1,587963 | 800,613 |
| 14 | -3 | 0 | -3 | s. zart verminderte kl. Septime | 1,769139 | 987,657 |
| 4 | -4 | 0 | 1 | s. überheftige übermäßige Quarte | 1,382716 | 561,006 |
| 10 | -4 | 0 | -1 | s. leicht übermäßige kl. Septime | 1,805996 | 1.023,354 |
| 1 | -4 | 0 | 2 | s. übermäßige kl. Terz | 1,209877 | 329,832 |
| 12 | -4 | 0 | -2 | s. heftig übermäßige Prime | 1,031998 | 54,528 |
| | | | = | s. verminderte kl. Sekunde | | |
| -2 | -4 | 0 | 3 | s. zart übermäßige kl. Sekunde | 1,058642 | 98,658 |
| 15 | -4 | 0 | -3 | s. zart verminderte kl. Terz | 1,179426 | 285,702 |
| 16 | -3 | 0 | -4 | s. erweiterte Prime | 1,010937 | 18,831 |

Bei diesen septimalen Intervallen bestehen folgende Beziehungen zu den pythagoreischen respektive zu den reinen Intervallen [Beispiel: Prime und pythagoreische kleine Sekunde (pythagoreisches Limma)]:

Prime 0,000 Cent + 8,433 Cent = zart übermäßige Prime
Zart überm. Prime + erweiterte Prime = leicht übermäßige Prime = 8,433 Cent + 18,831 Cent = 27,264 Cent
Leicht überm. Prime + zart überm. Prime = übermäßige Prime = 27,264 Cent + 8,433 Cent = 35,697 Cent
Überm. Prime + erweiterte Prime = heftig übermäßige Prime = 35,697 Cent + 18,831 Cent = 54,528 Cent
Heftig überm. Prime + zart überm. Prime = überheftig überm. Prime = 54,528 Cent + 8,433 Cent = 62,961 Cent
Überheftig übermäßige Prime + erweiterte Prime + zart übermäßige Prime = pythagoreisches Limma
= 62,961 Cent + 18,831 Cent + 8,433 Cent = 90,225 Cent

Pythagoreisches Limma (pyt. kleine Sekunde) – 8,433 Cent = 81,792 Cent = zart verminderte kleine Sekunde
Pythagoreisches Limma (pyt. kleine Sekunde) – 27,264 Cent = 62,961 Cent = leicht verminderte kleine Sekunde
Pythagoreisches Limma (pyt. kleine Sekunde) – 35,697 Cent = 54,528 Cent = verminderte kleine Sekunde
Pythagoreisches Limma (pyt. kleine Sekunde) – 54,528 Cent = 35,697 Cent = heftig verminderte kleine Sekunde
Pythagoreisches Limma (pyt. kleine Sekunde) – 62,961 Cent = 27,264 Cent = überheftig verm. kleine Sekunde

Leicht übermäßige Prime = 27,264 Cent = überheftig verm. kleine Sekunde
Übermäßige Prime = 35,697 Cent = heftig verminderte kleine Sekunde
Heftig übermäßige Prime = 54,528 Cent = verminderte kleine Sekunde
Überheftig übermäßige Prime = 62,961 Cent = leicht verminderte kleine Sekunde

## Aufsteigende und absteigende Terzen und Naturseptimen

| Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis 2 | 3 | 5 | 7 | Intervallname (Delta = Differenz zum reinen oder natürlichen Intervall) | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | 0 | 1 | 1 | nat. gr. Sekunde - Delta 6 | 1,093750 | 155,140 |
| 1 | 0 | 1 | -1 | gr. üb. Quarte + Delta 6 | 1,428571 | 617,488 |
| -7 | 0 | 1 | 2 | nat. gr. Septime + Delta 9 | 1,914063 | 1.123,966 |
| 4 | 0 | 1 | -2 | nat. gr. Sexte - Delta 9 | 1,632653 | 848,662 |
| -10 | 0 | 1 | 3 | nat. gr. Sexte + Delta 3 | 1,674805 | 892,791 |
| 7 | 0 | 1 | -3 | nat. gr. Setime - Delta 3 | 1,865889 | 1.079,836 |
| -7 | 0 | 2 | 1 | Quarte + Delta 10 | 1,367188 | 541,453 |
| -1 | 0 | 2 | -1 | nat. kl. Septime - Delta 4 | 1,785714 | 1.003,802 |
| -10 | 0 | 2 | 2 | nat. kl. Terz - Delta 1 | 1,196289 | 310,279 |
| 1 | 0 | 2 | -2 | Prime + Delta 8 | 1,020408 | 34,976 |
| -13 | 0 | 2 | 3 | nat. kl. Sekunde - Delta 7 | 1,046753 | 79,105 |
| 4 | 0 | 2 | -3 | nat. kl. Terz + Delta 11 | 1,166181 | 266,150 |
| -9 | 0 | 3 | 1 | nat. gr. Sexte + Delta 10 | 1,708984 | 927,767 |
| -4 | 0 | 3 | -1 | nat. gr. Sekunde + Delta 2 | 1,116071 | 190,115 |
| -12 | 0 | 3 | 2 | Quinte - Delta 1 | 1,495361 | 696,593 |
| -1 | 0 | 3 | -2 | nat. gr. Terz + Delta 8 | 1,275510 | 421,289 |
| -15 | 0 | 3 | 3 | Quarte - Delta 7 | 1,308441 | 465,419 |
| 2 | 0 | 3 | -3 | Quinte - Delta 11 | 1,457726 | 652,463 |
| 0 | 0 | -1 | 1 | gr. üb. Quarte - Delta 2 | 1,400000 | 582,512 |
| 6 | 0 | -1 | -1 | nat. gr. Septime - Delta 10 | 1,828571 | 1.044,860 |
| -3 | 0 | -1 | 2 | nat. gr. Terz - Delta 8 | 1,225000 | 351,338 |
| 8 | 0 | -1 | -2 | nat. kl. Sekunde - Delta 9 | 1,044898 | 76,034 |
| -6 | 0 | -1 | 3 | nat. kl. Sekunde + Delta 3 | 1,071875 | 120,164 |
| 11 | 0 | -1 | -3 | nat. kl. Terz - Delta 3 | 1,194169 | 307,209 |
| 2 | 0 | -2 | 1 | nat. gr. Sekunde + Delta 4 | 1,120000 | 196,198 |
| 8 | 0 | -2 | -1 | Quinte - Delta 10 | 1,462857 | 658,547 |
| 0 | 0 | -2 | 2 | Oktave - Delta 8 | 1,960000 | 1.165,024 |
| 11 | 0 | -2 | -2 | nat. gr. Sexte + Delta 1 | 1,671837 | 889,721 |
| -3 | 0 | -2 | 3 | nat. gr. Sexte + Delta 11 | 1,715000 | 933,850 |
| 14 | 0 | -2 | -3 | nat. gr. Septime + Delta 7 | 1,910671 | 1.120,895 |
| 5 | 0 | -3 | 1 | nat. kl. Septime - Delta 2 | 1,792000 | 1.009,885 |
| 10 | 0 | -3 | -1 | nat. kl. Terz - Delta 10 | 1,170286 | 272,233 |
| 2 | 0 | -3 | 2 | nat. kl. Sexte - Delta 8 | 1,568000 | 778,711 |
| 13 | 0 | -3 | -2 | Quarte + Delta 1 | 1,337469 | 503,407 |
| -1 | 0 | -3 | 3 | Quarte + Delta 11 | 1,372000 | 547,537 |
| 16 | 0 | -3 | -3 | Quinte - Delta 7 | 1,528536 | 734,581 |

Bei den septimalen Intervallen, die mittels Oktaven, natürlichen großen Terzen und Naturseptimen gebildet werden, entstehen ganz unterschiedliche, jedoch meist kleine Differenzintervalle sowohl zu den reinen als auch zu den natürlichen kleinen und großen Intervallen. Diese Differenzintervalle sind hier in der Tabelle mit Delta 1 bis Delta 11 bezeichnet. Die Größe in Cent, die Intervallfaktoren als auch die Exponenten zu den Basiszahlen 2, 3, 5, und 7 dieser mit Delta bezeichneten Kleinintervalle sind auf der folgenden Seite zu finden.

Die auf dieser Seite aufgeführten septimalen Intervalle sind ausschließlich über Oktav-, Terz- und Naturseptimschritte zu stimmen. Quinten kommen hier beim Stimmen nicht vor. Die Zahl der großen Terzen, die nach oben (positive Zahlen) oder nach unten (negative Zahlen) gestimmt werden müssen, sind in der dritten Spalte aufgelistet, die Zahl der Naturseptimen in der vierten Spalte. Mittels Oktavsprünge erzielt man dann die gewünschte Oktavlage.

## Aufsteigende und absteigende Terzen und Naturseptimen (Kleinintervalle)

Die Kleinintervalle Delta 3, 5, 6, 9, 12 und 13, die mit einer weiteren Namensbezeichnung und einer „0“ in der dritten Spalte der untenstehenden Tabelle gekennzeichnet sind, treten sowohl als Differenzintervalle zwischen den septimalen und den pythagoreischen Tonstufen auf als auch zwischen den septimalen und den natürlichen – klassisch gestimmten – kleinen und großen Intervallen. Die übrigen Kleinintervalle (Delta 1, 2, 4, 7, 8, 10 und 11) treten nicht als Differenzintervalle zwischen der pythagoreischen und der septimalen Stimmung auf, da sie reine Dur-Terz-Schritte in ihrer Charakteristik aufweisen und die Dur-Terz-Schritte sind nicht mit dem pythagoreischen Stimmungssystem kompatibel. Den beiden Kleinintervallen Delta 3 (septimale zart übermäßige Prime) und Delta 5 (septimale erweiterte Prime) kommt nicht nur eine besondere Bedeutung zu, weil sie häufig auftreten, sondern weil sie zusammen das Kleinintervall Delta 6 (septimale leicht übermäßige Prime) ausfüllen und letzteres ebenfalls recht häufig in Erscheinung tritt. Wer sich die Mühe macht, die einzelnen Daten zu den verschiedenen Kleinintervallen miteinander zu verknüpfen und zu vergleichen, wird zahlreiche Querverbindungen und harmonikale Verwandtschaften entdecken können und wer sich den Spaß erlaubt, Intervall für Intervall einzustimmen, der kann hören, daß das, was hier geschrieben steht, auch stimmig ist.

| Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis | | | | Intervallname (Kleine + kleinstintervalle) | Intervall-faktor | Centwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | s. = septimale | | |
| 11 | 1 | -3 | -2 | Delta 1 | 1,003102 | 5,362 |
| -5 | 2 | 2 | -1 | Delta 2 | 1,004464 | 7,712 |
| -10 | 1 | 0 | 3 | Delta 3 = s. zart überm. Prime | 1,004883 | 8,433 |
| 1 | 2 | -3 | 1 | Delta 4 | 1,008000 | 13,795 |
| 16 | -3 | 0 | -4 | Delta 5 = s. erweiterte Prime | 1,010937 | 18,831 |
| 6 | -2 | 0 | -1 | Delta 6 = s. leicht überm. Prime | 1,015873 | 27,264 |
| 17 | -1 | -3 | -3 | Delta 7 | 1,019024 | 32,626 |
| 1 | 0 | 2 | -2 | Delta 8 | 1,020408 | 34,976 |
| -4 | -1 | 0 | 2 | Delta 9 = s. überm. Prime | 1,020833 | 35,697 |
| -9 | 1 | 2 | 1 | Delta 10 | 1,025391 | 43,408 |
| -3 | 1 | -3 | 3 | Delta 11 | 1,029000 | 49,492 |
| 12 | -4 | 0 | -2 | Delta 12 = s. heftig. überm. Prime | 1,031998 | 54,528 |
| 2 | -3 | 0 | 1 | Delta 13 = s. überheftig überm. Prime | 1,037037 | 62,961 |

Die in oben stehender Tabelle aufgeführten septimalen Kleinintervalle sind teilweise über Oktav-, Quint- und Naturseptimschritte (Wert in Spalte 3 gleich 0), teilweise über Oktav-, Terz- und Naturseptimschritte (Wert in Spalte 2 gleich 0) und teilweise über Oktav-, Quint, Terz- und Naturseptimschritte (Wert weder in Spalte 2 noch in Spalte 3 gleich 0) zu stimmen. Die Zahl der Quinten (Spalte 2), großen Terzen (Spalte 3) und Naturseptimen (Spalte 4), die nach oben (positive Zahlen) oder nach unten (negative Zahlen) gestimmt werden müssen, sind für jedes Kleinintervall aufgelistet. Mittels Oktavsprünge erzielt man dann die gewünschte Oktavlage.

Außer in der oben stehenden Tabelle wurden betreffend Naturseptimen bisher nur Daten zu Intervallen zusammengefaßt, die entweder nur aus Oktaven, Quinten und Septimen oder nur aus Oktaven, Terzen und Septimen bestehen. Wollte man jedoch auch „alle“ Intervalle zusammenfassen, die aus Oktaven, Quinten, Terzen und Septimen gebildet werden können, müßte man dafür eigens ein umfangreiches Tabellenwerk verfassen.[10] An dieser Stelle möge es genügen, die Daten jener Intervalle aufzulisten, die im Spektrum des Wasserstoffs vorkommen:

[10] Zieht man nur die wichtigsten Intervalle in Betracht, das heißt jeweils ein bis vier Quinten, Terzen und Septimen rauf und runter, dann kommt man schon auf eine ganz erhebliche Intervallzahl. Von jedem Quintenschritt nach oben und unten wie vom Ausgangston (zusammen 9 Positionen) sind jeweils vier Terzschritte nach oben und unten (jeweils 8 Varianten von 9 Positionen aus) hinzu zu rechnen. Von allen 9 Positionen wie von allen 72 Varianten aus kommen dann noch jeweils 8 neue Varianten hinzu. Insgesamt führt das zu weit mehr als 600 unterschiedlichen Intervalle.

Der Stimmschlüssel zum Spektrum des Wasserstoffs – ausgehend von der Grenzfrequenz der Lyman-Serie respektive von der Frequenzzahl der Rydberg-Konstante – zeigt fünf Tonstufen an, deren Intervalle zur Ausgangsfrequenz sowohl von Quinten und Terzen als auch von reinen Septimen geprägt sind. Auffällig hierbei ist, daß sowohl bei den Terzen (Spalte unter der fett gedruckten Fünf) als auch bei den Septimen (Spalte unter der fett gedruckten Sieben) der Wert „1“ immer positiv und der Wert „2“ immer negativ ist. Es geht also entweder eine Terz hinauf oder zwei Terzen runter und dann geht es entweder eine Septime hinauf oder zwei Septimen hinunter. Die umgekehrte Variante kommt im Stimmschlüssel des Wasserstoffspektrums nicht vor.

| **Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis** | | | | **Intervallname (Delta = Differenz zum reinen oder natürlichen Intervall)** | **Intervall-faktor** | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | **3** | **5** | **7** | | | |
| 1 | 1 | -2 | 1 | Nat. gr. Sexte + Delta 4<br>Balmer-g | 1,680000 | 898,153 |
| 9 | 1 | -2 | -2 | Nat. gr. Terz + Delta 1<br>Pfund-b | 1,253878 | 391,676 |
| 1 | 2 | 1 | -2 | Nat. gr. Septime - Delta 9<br>Balmer-e | 1,836735 | 1.052,572 |
| -1 | -2 | 1 | 1 | Nat. gr. Septime + Delta 13<br>Lyman-e | 1,944444 | 1.151,230 |
| 7 | -2 | 1 | -2 | Gr. Üb. Quarte + Delta 12<br>Paschen-d | 1,451247 | 644,752 |

Im Stimmschlüssel des Wasserstoffspektrums erscheinen noch weitere Septimintervalle, jedoch nur in Verbindung mit Oktaven und Quinten. Es sind die folgenden zwei:

| **Intervallfaktoren in Exponenten zur Basis** | | | | **Intervallname (Delta = Differenz zum reinen oder natürlichen Intervall)** | **Intervall-faktor** | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **2** | **3** | **5** | **7** | | | |
| 5 | 1 | 0 | -2 | Okave - Delta 9<br>Lyman-z | 1,959184 | 1.164,303 |
| 1 | -2 | 0 | 1 | Quinte + Delta 13<br>Lyman-e | 1,555556 | 764,916 |

## 1.6 Der elfte Teilton

In den grundlegenden Texten des großen arabischen Musikphilosophen Abu-Nasr Al-Farabi (870-950) findet man so manchen Hinweis auf die Bedeutung des 11. Teiltones. Beispielsweise, daß die beiden natürlichen Intervalle 10 zu 11 und 11 zu 12, die bei uns durch das grobmaschige Raster der 12-stufigen gleichmäßigen Stimmung gefallen sind und im Standardisierungsprozeß einfach geopfert wurden, in der arabischen Musik eine konstitutive Rolle spielen und zum natürlichen Tonvorrat der wichtigsten arabischen Modi gehören.

Al-Farabi, der in Baghdad, Haleb und Damaskus lehrte, bezog sich oft auf die Überlieferungen des Instrumentenbauers und Musiker Mansur Zalzal (ca. 720-791), der genaue Konstruktionsanweisungen für Seiteninstrumenten überlieferte, aus denen klar hervorgeht, das der 11. Teilton schon damals eine wichtige Rolle in der arabischen Musikkultur spielte.

Al-Farabi überlieferte in seinem Hauptwerk zur Musik *„Kitab al-musiqi al-kabir“* äußerst präzise die harmonikalen Verknüpfungen diverser Intervalle, die auf dem 11. Teilton basieren. So werden in dem Werk die Intervalle 11/8, 16/11, 12/11, 18/11, 27/22, 33/32 und 64/33 ausführlich beschrieben.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnisse** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| Undezimale Überquarte | 11/8 | = | 1,375 000 | 551,371 942 |
| Undezimale Infraquinte | 16/11 | = | 1,454 545 | 648,682 058 |
| Undezimale neutrale Sekunde | 12/11 | = | 1,090 909 | 150,637 058 |
| Undezimale neutrale Sexte | 18/11 | = | 1,636 364 | 852,592 059 |
| Undezimale neutrale Terz[11] | 27/22 | = | 1,227 273 | 354,547 060 |
| Undezimale Überprime | 33/32 | = | 1,032 250 | 53,272 943 |
| Undezimale Infraoktave | 64/33 | = | 1,939 394 | 1.146,727 057 |

Das „Geheimnis“ der arabischen Vierteltonmusik liegt in den harmonikalen Gegebenheiten der Zahl 11 begründet. Die in Verbindung mit der 11 (Undezime), der 3 (Quinte respektive Duodezime) und der 2 (Oktave) erzeugten Intervalle liegen vornehmlich ziemlich genau in der Mitte zwischen den Intervallen, die mittels Quintensprünge (pythagoreisches Stimmungssystem) gebildet werden können. Die primäre Nutzung der Faktoren 2, 3 und 11 zur Bildung eines Stimmungssystems führt zu einer Skala, die von Vierteltönen und somit weit mehr als nur 12 Tonstufen pro Oktave geprägt ist.

Der elfte Teilton der Obertonreihe ist auch in Mitteleuropa nicht ganz unbekannt und wird hierzulande häufig „Alphorn-Fa“ genannt. Das Fa entstammt der lateinischen (auch italienischen oder französischen) Tonnamenreihe Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do, wobei das Fa (von einem Grundton C aus) der Tonstufe F entspricht. Dieses Fa spielt für Alphornspieler eine wichtige Rolle, da es nicht, wie man es von anderen Instrumenten gewohnt ist, in der Quarte zum Grundton erklingt, sondern einen Viertelton höher. Mit einem Alphorn kann zwar man sehr wohl Oktaven, Quinten und große Terzen in den Oberoktaven zum Grundton spielen, jedoch keine Quarte, da die Quarte nur als Differenzintervall und nicht als Erzeugerintervall in der Obertonreihe vorkommt. Das „Alphorn-Fa“ erklingt 53 Cent höher als die reine Quarte und wird darum undezimale Überquarte genannt. Das Ergänzungsintervall zur undezimalen Überquarte ist die undezimale Infraquinte, die 53 Cent tiefer als die reine Quinte erklingt. Analog erklingt auch die undezimale Überprime 53 Cent höher als die Prime und die undezimale Infraoktave 53 Cent tiefer als die reine Oktave.

[11] die Undezimale neutrale Terz wird im nahen und mittleren Osten auch *Zalzals Mittelfingerton* (nach dem Musiker und Instrumentenbauer Zalzal) benannt.

Das Alphorn ist ein Naturton-Instrument, das heißt, die einzelnen Töne werden nur durch unterschiedliche Lippenspannung und Atemdruck erzeugt, ohne Zuhilfenahme technischer Mittel wie Grifflöcher oder Ventile. Dies erfordert vom Bläser hohe Sensibilität, Lippen- und Atemkraft. Deswegen werden auf dem Alphorn meist lange und tiefe Töne gespielt, jedoch sind bei entsprechender Übung und Fertigkeit auch virtuose, schnelle Tonbewegungen möglich. Das Instrument hat im Grunde genommen eigentlich nur noch verstärkende und den Klang modifizierende Funktion. Die leicht oder stärker gespannten Lippen des Bläsers bilden einen Widerstand gegen die in das Instrument geblasene Luft und erzeugen durch ihre Vibration Töne mit immer größer werdenden ganzzahligen Schwingungszahlen. Je höher die Lippenspannung, desto schneller die Schwingungen und desto höher der Ton; je schwächer die Lippenspannung, desto tiefer der Ton. Durch immer stärker werdende Lippenspannung, entsteht die folgende Naturtonreihe (in C notiert).


**Abb.19** zeigt die Naturtöne (Obertöne), die mit einem Alphorn erzeugt werden können. Quelle: Franz Schüssele: Alphorn und Hirtenhorn in Europa, Gälfiäßler Verl., Friesenheim 2000

Traditionell gibt es verschiedene Alphörner. Das Ges-Horn (etwa 340 cm lang) verfügt über eine ausgewogene Balance zwischen rundem, weichen Wohlklang und Spielbeweglichkeit. Das F-Horn (etwa 370 cm lang) klingt etwas voller und dunkler als das Ges-Horn. Das E-Horn (etwa 390 cm lang) klingt sehr reizvoll und interessant. Die strahlende Tonart E-Dur ist eine für Blasinstrumente ungewöhnliche Tonart. Die hohen Töne sind leichter erreichbar, dafür aber auch riskanter in der Ansprache. Das große Es-Horn (etwa 420 cm lang) hat einen sehr mächtigen, runden Klang. Aufgrund seiner Länge kann man leicht hoch blasen, es ist aber ziemlich unbeweglich und eignet sich so eigentlich nur für eine relativ langsame Spielweise. Das As-Horn (etwa 310 cm lang) ist sehr hell und beweglich und eignet sich deshalb gut für schnelle Passagen.

### 1.6.1 Das Einstimmen des 11. Teiltones

Das direkte Einstimmen des 11. Teiltones respektive der undezimalen Überquarte nach dem Ohr ist auf den meisten akustischen (im Gegensatz zu elektronischen) Instrumenten kaum oder auch gar nicht möglich. Deshalb muß auf eine Substitutions-Einstimmung (Ersatz-Einstimmung) respektive auf eine Näherungs-Einstimmung zurückgegriffen werden. Als eine sehr einfach zu stimmende und recht gute Näherung bietet sich folgende Verfahrensweise an:

Quarte (4/3) + großes Chroma (135/128) – kleine Diesis (128/125) = Näherungsintervall (5.625/4.069)

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| Quarte | $2^{2} \times 3^{-1} \times 5^{0}$ | = | 1,333 333 333 | 498,044 999 |
| + großes Chroma | $2^{-7} \times 3^{3} \times 5^{1}$ | | 1,054 687 500 | 92,178 716 |
| – kleine Diesis | $2^{7} \times 3^{8} \times 5^{-3}$ | = | 1,024 000 000 | 41,058 858 |
| = Näherung undezimale Überquarte | $2^{-12} \times 3^{2} \times 5^{4}$ | = | 1,373 291 016 | 549,164 857 |

Um dieses Intervall einzustimmen muß man zwei Quinten und dann vier große Terzen hochstimmen und dann schließlich zwei Oktaven hinunter. Stimmschlüssel: – 2 O + 2 Q + 4 T.

Das Näherungsintervall ist etwas kleiner als die undezimale Überquarte. Der Größenunterschied macht etwa 2 Cent aus. Da der Größenunterschied zwischen einer reinen Quinte und einer gleichmäßigen Quinte ebenfalls etwa 2 Cent ausmacht (die reine Quinte ist um 1,955 Cent größer als die gleichmäßige Quinte), ist es für Klavierstimmer oder Orgelstimmer eine leichte – nicht außergewöhnliche – Aufgabe, die korrespondierende Schwebungszahl von einem beliebigen Ton aus zu berechnen, um dann mittels Zählens von Schwebungen die Umstimmung vom Näherungsintervall zur reinen undezimalen Überquarte vorzunehmen.

In der folgenden Tabelle sind die genauen Werte (Intervallfrequenzverhältnis, Centwert) des kleinen Differenzintervalls zwischen dem Näherungsintervall und der undezimalen Überquarte aufgelistet.

| **Intervall** | **Intervallfrequenzverhältnis** | | | **Centwert** |
|---|---|---|---|---|
| Undezimale Überquarte | $2^{-3} \times 3^{0} \times 5^{0} \times 11^{1}$ | = | 1,375 000 000 | 551,317 942 |
| – Näherung undezimale Überquarte | $2^{-12} \times 3^{2} \times 5^{4} \times 11^{0}$ | = | 1,373 291 016 | 549,164 857 |
| = Differenzintervall | $2^{9} \times 3^{-2} \times 5^{-4} \times 11^{1}$ | = | 1,001 244 444 | 2,153 085 |

Um einen Ton einzustimmen, der 2,153 Cent höher ist, als ein gegebener Ton mit der Frequenz f, muß man zuerst die Frequenz f mit dem Faktor 1,001 244 (Intervallfrequenzverhältnis) multiplizieren und vom erhaltenen Resultat (Produkt) $f_1$ die Frequenz f abziehen. Die Differenz $f_1 – f$ ist die Schwebungszahl $f_d$ in Hz (Schwebungen pro Sekunde). Das 60-fache der Schwebungszahl $f_d$ ist die entsprechende Schwebungszahl pro Minute ($f_d$ x 60). Will man beispielsweise den Ton finden, der 2,153 Cent höher liegt als ein Ton mit 100 Hz (f), wird die Zahl 100 mit 1,001 244 multipliziert. Das erhaltene Produkt 100,1244 ist die Schwingungszahl von $f_1$. Die Differenz 100,1244 – 100 = 0,1244 ($f_1 – f = f_d$) ist die Schwebungszahl in Hz, das 60-fache davon (0,1244 x 60 = 7,464) ist die Schwebungszahl pro Minute.

Zur Präzisen Einstimmung von nahe beieinanderliegenden Tönen wird häufig auch die Dauer einer Schwebung berechnet und dann gemessen. Diese ist gleich dem Kehrwert ($^1/_x$) der Schwebungszahl. In unserem Rechenbeispiel: $1 / f_d$ = 1 / 0,1244 = 8,039. Die Schwebungsdauer beträgt somit ziemlich genau 8 Sekunden. Das heißt, erklingt zu einem Ton mit 100,0000 Hz gleichzeitig ein zweiter Ton mit 100,1244 Hz, hört man alle 8 Sekunden eine Schwebung.

### 1.6.2 Undezimale Überquarten im Wasserstoffspektrum

Im Wasserstoffspektrum kommen zwei undezimale Überquarten vor. Die Pfund-Alpha-Linie ($Pf_\alpha$ = 292,401 Hz in der 37. Unterroktave) liegt eine undezimale Überquarte über der Paschen-Beta-Linie ($Pa_\beta$ = 212,655 Hz in der 40. Unteroktave) und die Brackett-Gamma-Linie ($Br_\gamma$ = 503,497 Hz in der 38. Unteroktave) liegt eine undezimale Überquarte über der Lyman-Zeta-Linie ($L_\zeta$ = 366,179 Hz in der 43. Unteroktave). Die folgende Tabelle zeigt die Werte zur Einstimmung von $Pf_\alpha$ und $Br_\gamma$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ausgangsfrequenz ($f_0$) | | $Pa_\beta$ = | 212,655 Hz | $L_\zeta$ = | 366,179 Hz |
| Näherung undezi. Überquarte (f) | $f = f_0 \times 1{,}373\,291$ | = | 292,037 Hz | = | 502,870 Hz |
| Undezimale Überquarte ($f_1$) | $f_1 = f_0 \times 1{,}375\,000$ | = $Pf_\alpha$ | 292,401 Hz | = $Br_\gamma$ | 503,497 Hz |
| Schwebungszahl in Hz ($f_d$) | $f_d = f_1 – f$ | = | 0,364 Hz | = | 0,627 Hz |
| Schwebungszahl pro Minute | $f_d \times 60$ | = | 21,8 $min^{-1}$ | = | 37,6 $min^{-1}$ |
| Schwebungsdauer in Sekunden | $1 / f_d$ | = | 2,75 sec | = | 1,60 sec |

# 2 Wasserstoff – Stimmschlüssel

Der Stimmschlüssel zu den Tönen der Spektrallinien des Wasserstoffs beinhaltet alle Angaben, um vom gegebenen Ton der Rydbergkonstante (in der 43. Unteroktave ein fis‘ mit 373,808 Hz) mittels Quinten, natürlichen großen Terzen und Naturseptimen sämtliche Töne des Wasserstoffspektrums rein akustisch nach Gehör einzustimmen. Mit Ausnahme von zwei Tönen (Brackett-Gamma-Linie und Pfund-Alpha-Linie) können alle Töne vollkommen rein, das heißt, ohne Schwebungen zählen zu müssen, eingestimmt werden. Nur die beiden letztgenannten Töne erfordern eine Stimmtechnik, wie sie von jedem Klavierstimmer genutzt wird, bei der die Töne zuerst absolut rein gestimmt und danach leicht verstimmt werden, wobei die Größenordnung der Verstimmung durch das Zählen von Schwebungen gehandhabt und festgestellt wird.

Die naturwissenschaftliche Methodik der Transkription der Wasserstoffspektren in den Hörbereich ist im Skriptum *„$H_2$ – Der Klang der Wasserstoffmoleküle – Musikalische Transkription der Wasserstoffspektren – Die physikalischen Grundlagen zur Anhörung der Quantentheorie“* (Teil 1) beschrieben und wird hier nicht nochmals erklärt und erläutert. Das Skriptum ist im Internet abrufbar unter der Adresse http://www.planetware.de/tune_in/wasserstoff-1.pdf

## 2.1 Wasserstoff – Stimmschlüssel – Schema

Das auf der nächsten Seite graphisch dargestellte Schema zeigt den Stimmschlüssel zu den einzelnen Tönen des Wasserstoffspektrums im Überblick. Die waagerechte durchgezogene rote Linie in der Mitte der Graphik zeigt die Tonhöhe der Ausgangsfrequenz fis‘ = 373,808 Hz. Die gestrichelten roten Linien darüber und darunter markieren jeweils den Abstand einer Oktave (1.200 Cent). Oktavsprünge sind durch rot markierte Felder gekennzeichnet.

Die Abstände der reinen Quinten (701,955 Cent) von der Ausgangsfrequenz werden mittels durchgezogenen grünen Linien angezeigt und Quintsprünge mittels grün markierter Felder. Die Abstände der natürlichen großen Terzen (386,314 Cent) von den Quinten über respektive unter der Ausgangsfrequenz werden mittels durchgezogenen blauen Linien angezeigt. Reelle reine Terzabstände von der Ausgangsfrequenz selbst kommen im Wasserstoffspektrum nicht vor. Einzig und allein der virtuelle Ton des Grenzwertes der Pfund-Serie liegt zwei große Terzen (und eine Oktave) tiefer als die Ausgangsfrequenz. Terzsprünge werden mittels blau markierter Felder angezeigt.

Ausgangspunkte für Naturseptimen (968,826 Cent) sind Quint- respektive Doppelquintabstände oder kombinierte Quint-Terz-Abstände von der Ausgangsfrequenz. Nuturseptimsprünge von der Ausgangsfrequenz selbst kommen nicht vor. Naturseptimsprünge werden mittels violett markierter Felder gekennzeichnet und der Abstand von einem anderen Intervall mittels einer waagerecht durchgezogenen Linien in violetter Farbe.

Die undezimale Überquarte (551,318 Cent) basierend auf dem Teilungsverhältnis des 11. Teiltones kommt zweimal vor. Ausgangspunkte für die undezimalen Überquarten sind in beiden Fällen kombinierte Intervallabstände von der Ausgangsfrequenz (+ Quinte –2 Naturseptimen im einen Fall und –2 Quinten –2 Terzen im anderen Fall).

In der graphischen schematischen Darstellung des Stimmschlüssels wurde auf die Darstellung der reinen Oktavsprünge verzichtet. Einerseits wird dadurch die Systematik übersichtlicher und leichter erkennbar, andererseits kann der Stimmschlüssel für verschiedene Oktavlagen genutzt werden. Das Transponieren einer Tonstufe von einer Oktavlage in eine andere zählt ja zudem zu den einfachsten Übungen in der Stimmtechneik.

Links von der senkrecht durchgezogenen schwarzen Linie sind die virtuellen Töne (Frequenzen der Grenzwerte) des Wasserstoffspektrums angezeigt, rechts davon die reellen Tone (Frequenzen der Spektrallinien).

**Schematische Darstellung des Stimmschlüssels zu allen Spektrallinien des Wasserstoffs**

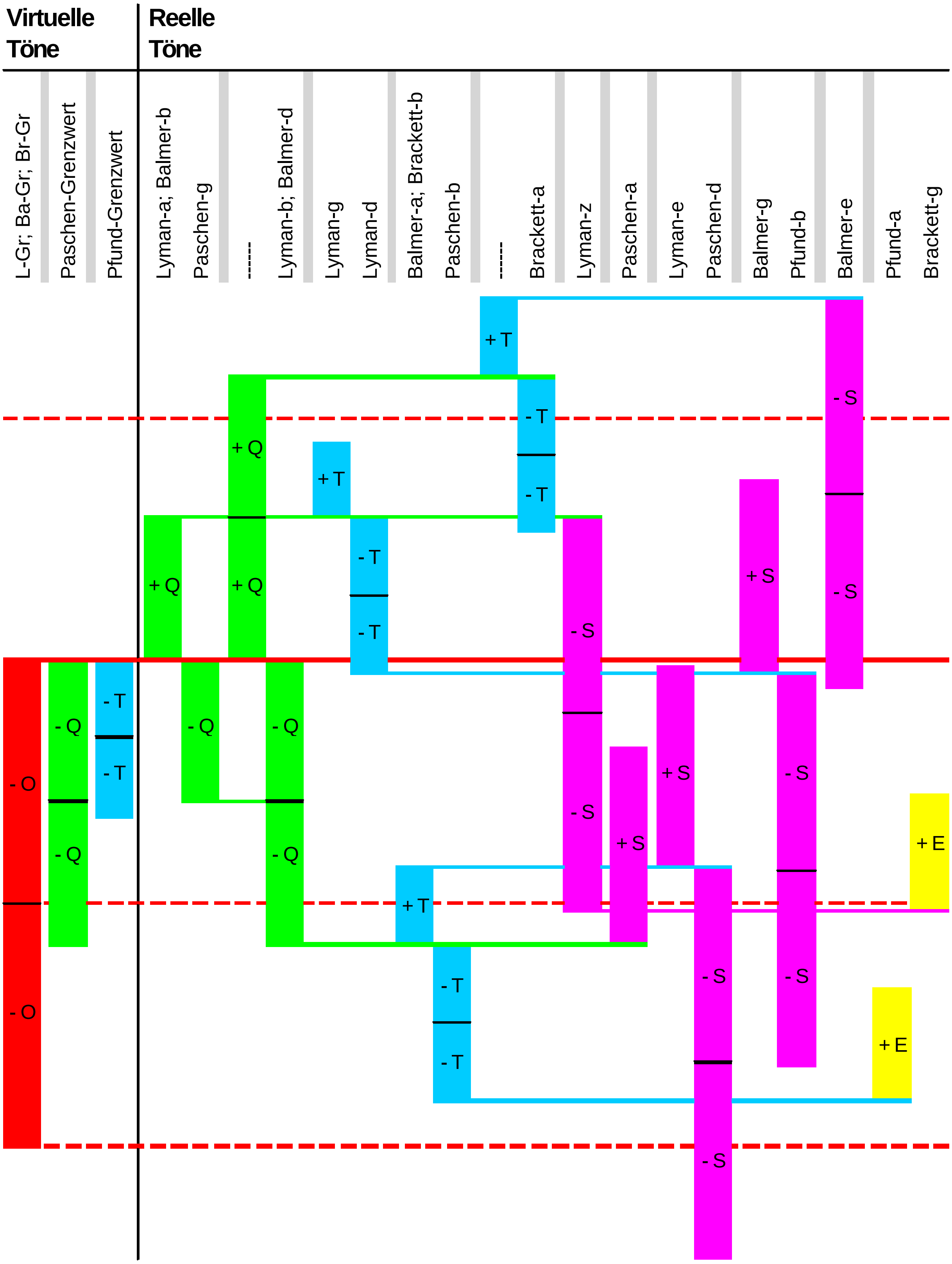



**Abb. 20** zeigt die schematische Darstellung des Stimmschlüssels zu den Spektrallinien des Wasserstoffs wie auch zu den Grenzwerten der einzelnen Serien im Wasserstoffspektrum. Erläuterungen siehe vorhergehende Seite.

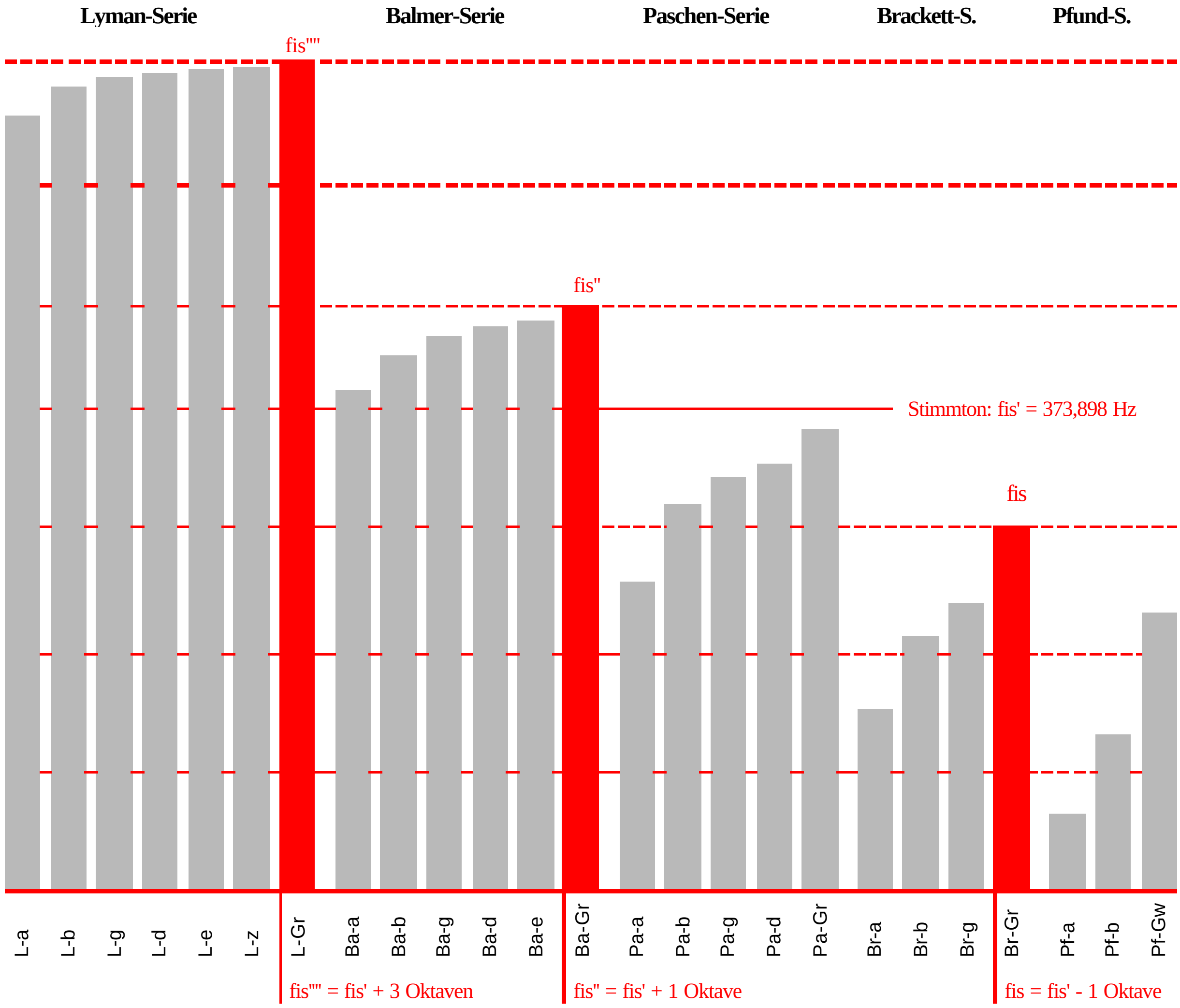
## Datenblatt zum Stimmschema

| Serie + Linie | Exponenten zur Basis (für 40. O.) 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | Frequenz 40. Oktave in Hertz | Tonstufe | Intervallfaktor < 2 u. > 1 | Centwert < 1.200 u. > 0 | Frequenz zwischen fis und fis' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lyman** | | | | | | | | | | |
| Grenzwert | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.990,465 | fis'''' | 2,000000 | 1.200,000000 | 373,808 |
| Alpha | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2.242,849 | cis'''' | 1,500000 | 701,955001 | 280,356 |
| Beta | 6 | -2 | 0 | 0 | 0 | 2.658,191 | e'''' | 1,777778 | 996,089998 | 332,274 |
| Gamma | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2.803,561 | f'''' | 1,875000 | 1.088,268715 | 350,445 |
| Delta | 6 | 1 | -2 | 0 | 0 | 2.870,846 | f'''' (2) | 1,920000 | 1.129,327573 | 358,856 |
| Epsilon | 1 | -2 | 1 | 1 | 0 | 2.907,396 | fis'''' (2) | 1,944444 | 1.151,229619 | 363,425 |
| Zeta | 7 | 1 | 0 | -2 | 0 | 2.929,435 | fis'''' (3) | 1,959184 | 1.164,303188 | 366,179 |
| **Balmer** | | | | | | | | | | |
| Grenzwert | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 747,616 | fis'' | 2,000000 | 1.200,000000 | 373,808 |
| Alpha | 1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 415,342 | gis' | 1,111111 | 182,403712 | 207,671 |
| Beta | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 560,712 | cis'' | 1,500000 | 701,955001 | 280,356 |
| Gamma | 1 | 1 | -2 | 1 | 0 | 627,998 | dis'' | 1,680000 | 898,153480 | 313,999 |
| Delta | 4 | -2 | 0 | 0 | 0 | 664,548 | e'' | 1,777778 | 996,089998 | 332,274 |
| Epsilon | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 | 686,586 | f'' (3) | 1,836735 | 1.052,571903 | 343,293 |
| **Stimmton** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 373,808 | fis' | 1,000000 | 0,000000 | 186,904 |
| **Paschen** | | | | | | | | | | |
| Grenzwert | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 332,274 | e' | 1,777778 | 996,089998 | 332,274 |
| Alpha | -1 | -2 | 0 | 1 | 0 | 145,370 | d | 1,555556 | 764,915905 | 290,740 |
| Beta | 7 | -2 | -2 | 0 | 0 | 212,655 | gis (2) | 1,137778 | 223,462571 | 212,655 |
| Gamma | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 249,205 | h | 1,333333 | 498,044999 | 249,205 |
| Delta | 6 | -2 | 1 | -2 | 0 | 271,244 | cis' (2) | 1,451247 | 644,751899 | 271,244 |
| **Brackett** | | | | | | | | | | |
| Grenzwert | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 186,904 | fis | 2,000000 | 1.200,000000 | 373,808 |
| Alpha | -1 | 2 | -2 | 0 | 0 | 67,285 | C | 1,440000 | 631,282574 | 269,142 |
| Beta | -1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 103,836 | GIS | 1,111111 | 182,403712 | 207,671 |
| Gamma | -1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 125,874 | H | 1,346939 | 515,621130 | 251,748 |
| **Pfund** | | | | | | | | | | |
| Grenzwert | 3 | 0 | -2 | 0 | 0 | 119,619 | AIS | 1,280000 | 427,372572 | 239,237 |
| Alpha | 1 | -2 | -2 | 0 | 1 | 36,550 | D | 1,564444 | 774,780513 | 292,401 |
| Beta | 6 | 1 | -2 | -2 | 0 | 58,589 | AIS (2) | 1,253878 | 391,675760 | 234,355 |

Das Datenblatt enthält alle Angaben, die man braucht, um vom Stimmton (Ausgangston) fis‘ alle Töne des Wasserstoffspektrums einzustimmen. Alle Spalten links von der durchgezogenen senkrechten schwarzen Linie beziehen sich auf die 40. Unteroktave des Wasserstoffspektrums, die drei Spalten rechts von der schwarzen Linie auf die Oktave fis – fis‘.

Ganz links stehen die Linienbezeichnungen. Dann folgen die Exponenten zu den Basiszahlen 2, 3, 5, 7 und 11. Die Exponenten zur Basis 3 in grüner Farbe zeigen die Zahl der Quintsprünge an. Positive Zahlen zeigen Quintsprünge nach oben an, negativen nach unten. Die Exponenten zur Basiszahl 5 geben die Zahl der Terzsprünge, zur Basiszahl 7 die Zahl der Naturseptimspringe und zur Basiszahl 11 die Zahl der undezimalen Überquartsprünge an. Danach folgen die Frequenzangaben und die Tonbezeichnungen. Die Angaben rechts der schwarzen Linie beziehen sich auf die in die Oktave fis – fis‘ transponierten Töne. Es sind dies der Reihe nach: Intervallfaktor, Centwert und die entsprechende Frequenz.

### 2.1.1 Grenzwerte (virtuelle Töne) – Lyman, Balmer, Brackett



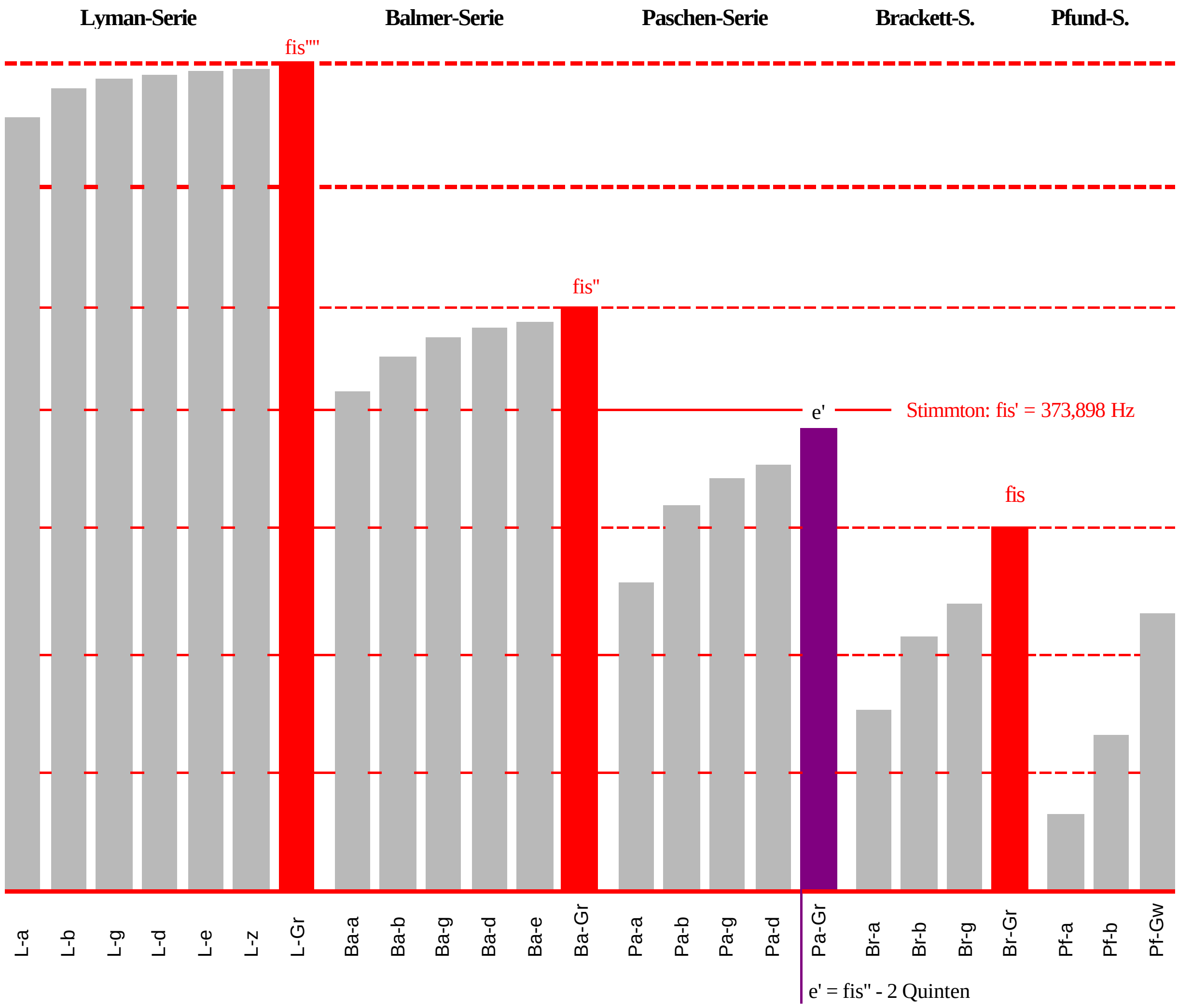

Die 43. Unteroktave der Rydbergkonstante für Wasserstoff hat eine Frequenz von 373,808 Hz. Von diesem Stimmton (in der Graphik mit „Stimmton“ bezeichnet und durch eine rote waagerechte Linie gekennzeichnet) aus liegt der Grenzwert der Lyman-Serie in der 40. Unteroktave (L-Gr) drei Oktaven höher, der Grenzwert der Balmer-Serie in der 40. Unteroktave (Ba-Gr) eine Oktave höher und der Grenzwert der Brackett-Serie in der 40. Unteroktave (Br-Gr) eine Oktave tiefer.

Ausgangspunkt des Stimmungssystems des Wasserstoffs ist die Tonstufe fis‘ respektive deren oktav-analogen Töne Fis, fis, fis‘‘ und so weiter.

| Oktaven | Quinten | Terzen | Septimen | Linie | Frequenz | Ton |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | | | | Br-Gr | 186,90 Hz | fis |
| + 1 | | | | Ba-Gr | 747,62 Hz | fis‘‘ |
| + 3 | | | | L-Gr | 2.990,47 Hz | fis‘‘‘‘ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

## 2.1.2 Grenzwerte (virtuelle Töne) – Paschen




Der Grenzwert der Paschen-Serie (Pa-Gr) in der 40. Unteroktave liegt ein pythagoreischer Ganzton (großer Ganzton)[12] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Dem Paschen-Grenzwert (Pa-Gr) entspricht der Ton e‘ mit einer Frequenz von 332,27 Hz.

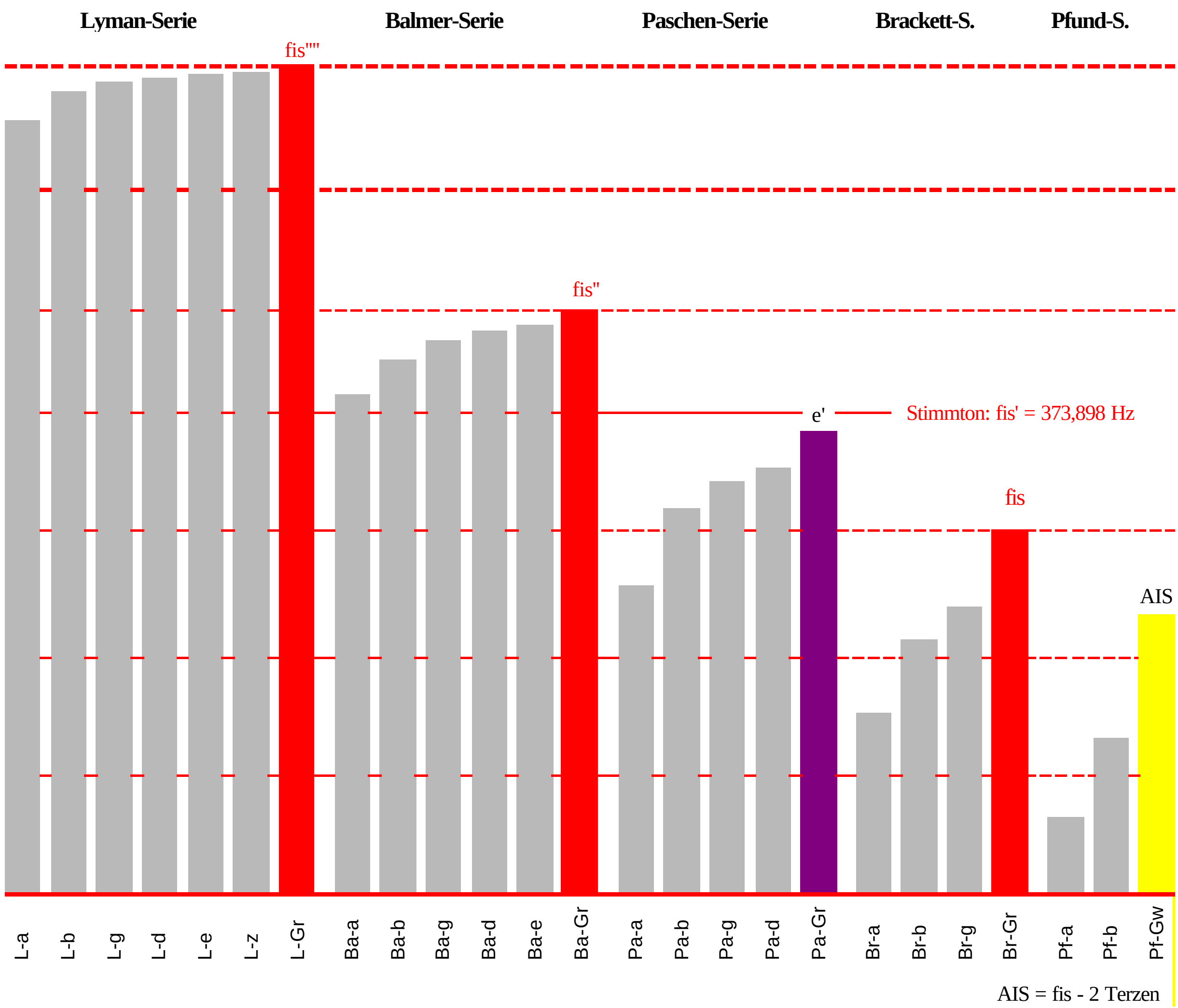
Vom Ausgangspunkt des Stimmungssystems des Wasserstoffs fis‘ wird zur Erreichung des Tones e‘ zuerst die Oktave zum fis‘‘ gebildet, dann die Unterquinte zum h‘ und dann vom h‘ die Unterquinte zum e‘.

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | – 2 | | | Pa-Gr | 332,27 Hz | e‘ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[12] Ein pythagoreischer Ganzton (großer Ganzton) entspricht dem Differenzintervall, das aus zwei Quinten einerseits und einer Oktave andererseits gebildet wird (zwei Quinten sind um einen großen Ganzton größer als eine Oktave). Das Frequenzverhältnis der Töne dieses Intervalls ist 8 zu 9 respektive 1 zu 9/8 = 1,125000 (= 203,91 Cent).

### 2.1.3 Grenzwerte (virtuelle Töne) – Pfund




Der Grenzwert der Pfund-Serie (Pf-Gr) in der 40. Unteroktave liegt eine Oktave und zwei große Terzen[13] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Dem Pfund-Grenzwert (Pf-Gr) entspricht der Ton AIS mit einer Frequenz von 119,62 Hz.

Vom Ausgangspunkt des Stimmungssystems des Wasserstoffs fis‘ wird zur Erreichung des Tones AIS zuerst die Unteroktave zum fis gebildet, dann die Unterterz (eine große Terz tiefer) zum d und dann vom d aus die Unterterz zum AIS.

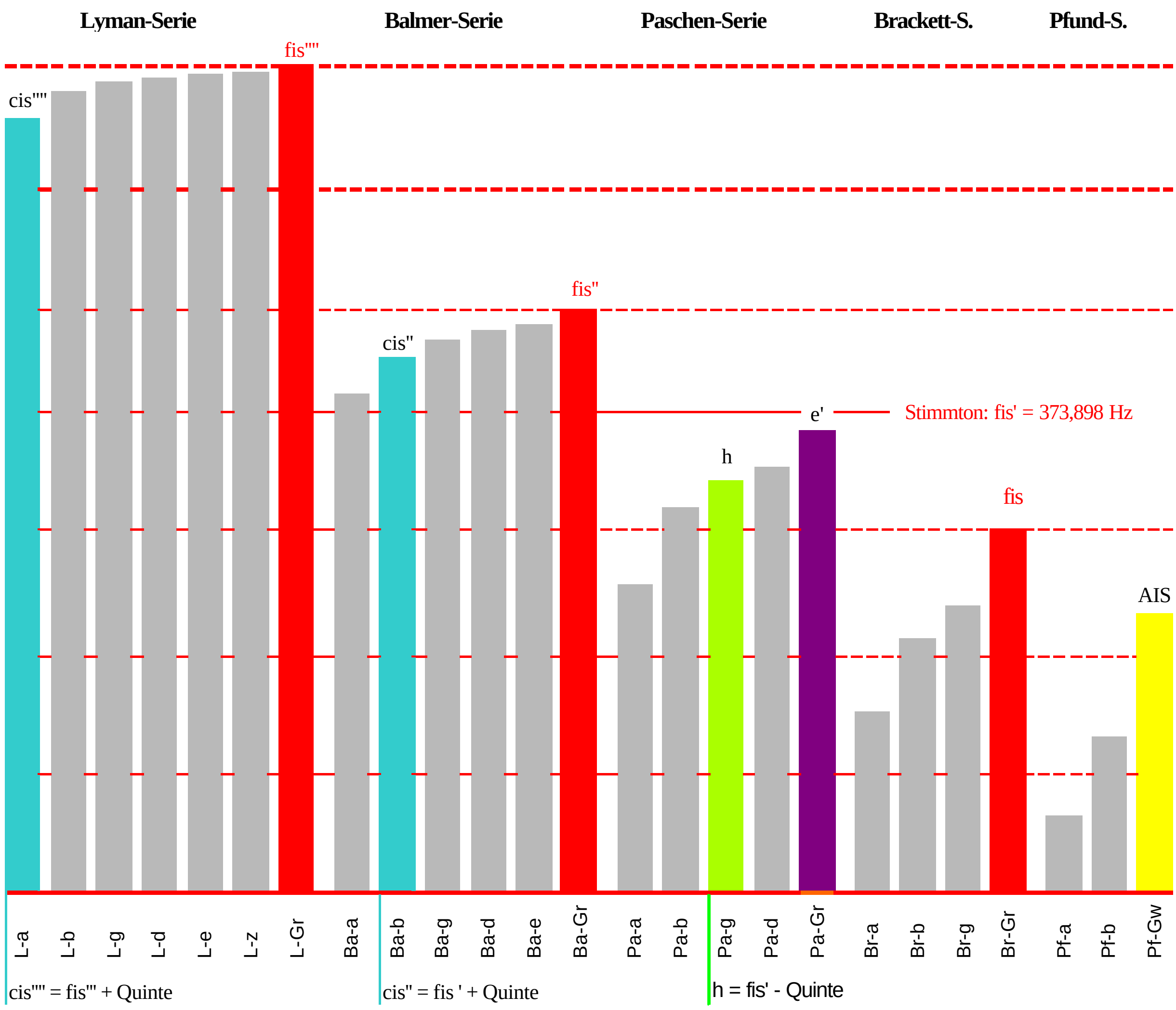
| Oktaven | Quinten | Terzen | Septimen | Linie | Frequenz | Ton |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | | – 2 | | Pf-Gr | 119,62 | AIS |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

13 Das Intervall von zwei großen Terzen wird auch „kleine übermäßige Quinte“ genannt. Diesem Intervall entspricht das Frequenzverhältnis von 16 zu 25 respektive von 1 zu 25/16 = 1,562500 (= 772,63 Cent).

Das Intervall, das aus zwei großen Terzen einerseits und einer natürlichen Quinte anderseits gebildet wird, ist gleich dem Intervall, das zwischen einer kleinen natürlichen Terz und einer großen natürlichen Terz liegt und wird „kleines Chroma“ oder auch „kleiner Halbton“ genannt. Dem kleinen Chroma entspricht das Frequenzverhältnis von 24 zu 25 respektive von 1 zu 25/24 = 1,041667 (= 70,67 Cent).

## 2.1.4 Einfache Quintintervalle – Lyman-Alpha, Balmer-Beta, Paschen-Gamma




Die Alpha-Linie der Lyman-Serie (L-a = L-α) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine reine Quinte höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Alpha-Linie (L-a) entspricht der Ton cis‘‘‘‘ mit einer Frequenz von 2.242,85 Hz. Der Ton der Lyman-Alpha-Linie liegt somit eine natürliche Quarte tiefer als der Ton des Lyman-Grenzwertes (fis‘‘‘‘ mit 2.990,47 Hz).

Die Beta-Linie der Balmer-Serie (Ba-b = Ba-β) in der 40. Unteroktave liegt eine reine Quinte höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Balmer-Beta-Linie (Ba-b) entspricht der Ton cis‘‘ mit einer Frequenz von 560,71 Hz. Der Ton der Balmer-Beta-Linie liegt somit eine natürliche Quarte tiefer als der Ton des Balmer-Grenzwertes (fis‘‘ mit 747,62 Hz).

Die Gamma-Linie der Paschen-Serie (Pa-g = Pa-γ) in der 40. Unteroktave liegt eine reine Quinte tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Paschen-Gamma-Linie (Pa-g) entspricht der Ton h mit einer Frequenz von 249,21 Hz. Der Ton der Paschen-Gamma-Linie liegt genau eine natürliche Quarte tiefer als der Ton des Paschen-Grenzwertes (e‘ mit 332,27 Hz).

Die Alpha-Linie der Lyman-Serie (erste Linie der ersten Serie), die Beta-Linie der Balmer-Serie (zweite Linie der zweiten Serie) und die Gamma-Linie der Paschen-Serie (dritte Linie der dritten Serie) haben eine Gemeinsamkeit. Sie liegen alle eine Quarte tiefer als der Grenzwert der Serie, in denen sie selbst liegen.

Das Intervall von der Paschen-Gamma-Linie (h) zur Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) umfaßt eine Oktave und einen pythagoreischen Ganzton.[14]

Das Intervall vom Paschen-Grenzwert (e‘) zur Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) ist eine pythagoreische große Sexte.[15]

Das Intervall vom Pfund-Grenzwert (AIS) zur Paschen-Gamma-Linie (h) umfaßt eine Oktave und ein kleines Chroma (natürliche kleine übermäßige Prime).[16]

Das Intervall vom Pfund-Grenzwert (AIS) zur Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) umfaßt zwei Oktaven und eine natürliche große übermäßige Sekunde.[17]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 1 | | | Ba-b | 560,71 Hz | cis‘‘ |
| + 2 | + 1 | | | L-a | 2.242,85 Hz | cis‘‘‘‘ |
| | – 1 | | | Pa-g | 249,21 Hz | h |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

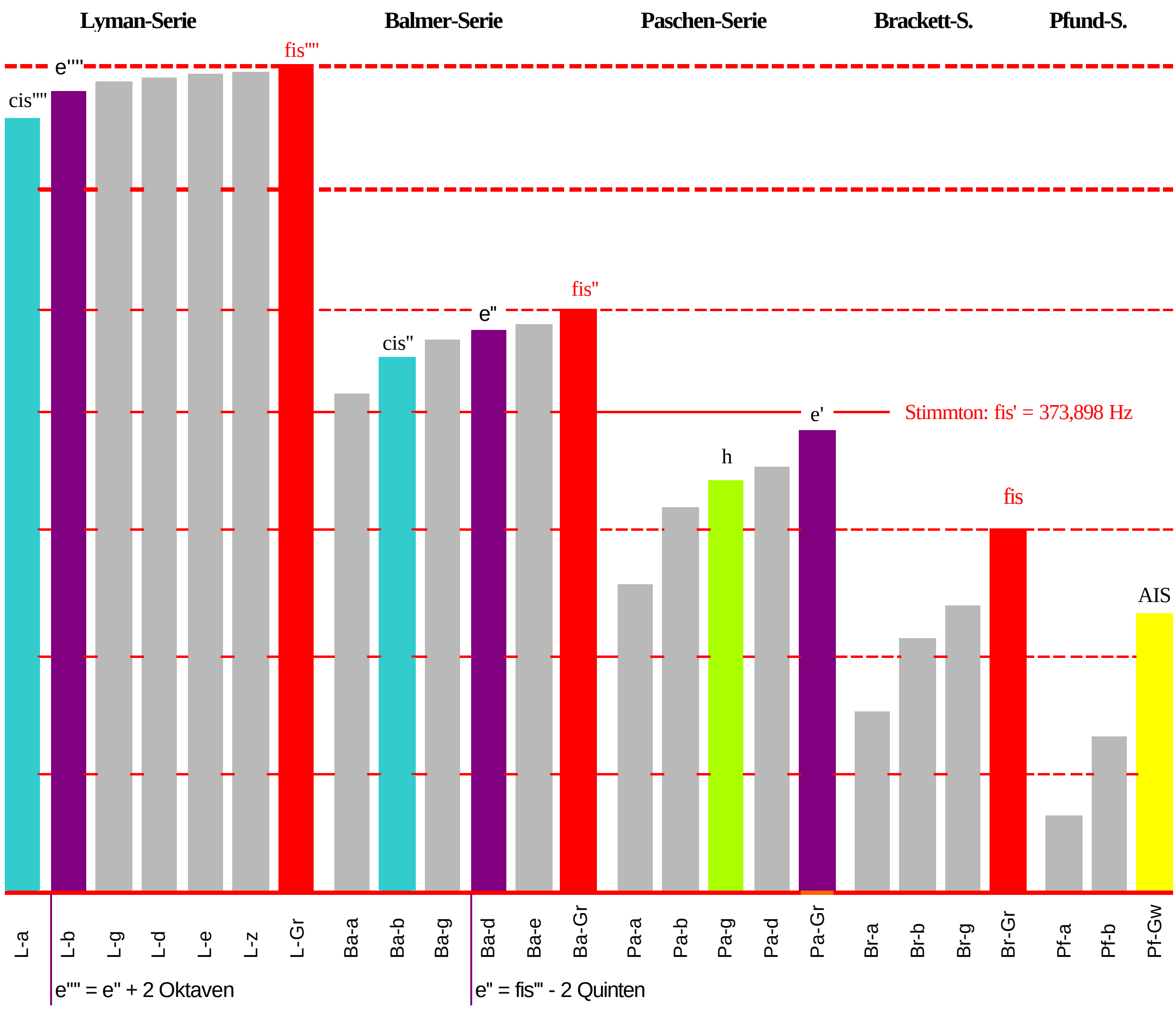
14 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall eines pythagoreischen Ganztones (pythagoreische große Sekunde) bilden, ist 8 zu 9 respektive 1 zu 9/8 = 1,125000 (= 203,91 Cent). Das Ergänzungsintervall zum pythagoreischen Ganzton ist die pythagoreische kleine Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime bilden, ist 9 zu 16 respektive 1 zu 16/9 = 1,777778 (= 996,09 Cent).

15 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Sexte bilden, ist 16 zu 27 respektive 1 zu 27/16 = 1,687500 (= 905,87 Cent) Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen großen Sexte ist die pythagoreische kleine Terz. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz bilden, ist 27 zu 32 respektive 1 zu 32/27 = 1,185185 (= 294,13 Cent).

16 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Prime (kleines Chroma) bilden, ist 24 zu 25 respektive 1 zu 25/24 = 1,041667 (= 70,67 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Prime ist die natürliche große verminderte Oktave. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer großen verminderten Oktave bilden, ist 25 zu 48 respektive 1 zu 48/25 = 1,920000 (= 1.129,33 Cent).

17 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Sekunde bilden, ist 64 zu 75 respektive 1 zu 75/64 = 1,171675 (= 274,58 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen übermäßigen Sekunde ist die natürliche kleine verminderte Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen verminderten Septime bilden, ist 75 zu 128 respektive 1 zu 128/75 = 1,706667 (= 925,42 Cent).

### 2.1.5 Doppelte Quintintervalle – Lyman-Beta, Balmer-Delta, (Paschen-Grenzwert)




Die Beta-Linie der Lyman-Serie (L-b = L-β) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine pythagoreische kleine Septime[18] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Beta-Linie (L-b) entspricht der Ton e‘‘‘‘ mit einer Frequenz von 2.658,19 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Unterquinte zum h (= Gamma-Linie der Paschen-Serie) bildet, dann die Oktave zum h‘, dann die Oktave zum h‘‘, dann die Unterquinte zum e‘‘ (= Delta-Linie der Balmer-Serie), dann die Oktave zum e‘‘‘ und schließlich die Oktave zum e‘‘‘‘. Der Ton der Lyman-Beta-Linie liegt ein pythagoreischer Ganzton tiefer als der Ton des Lyman-Grenzwertes (fis‘‘‘‘ mit 2.990,47 Hz).

Die Delta-Linie der Balmer-Serie (Ba-d = Ba-δ) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven tiefer als die Beta-Linie der Lyman-Serie und eine Oktave höher als der Grenzwert der Paschen-Serie. Der Ton der Delta-Linie der Balmer-Serie liegt ein pythagoreischer Ganzton tiefer als der Ton des Balmer-Grenzwertes (fis‘‘ mit 747,62 Hz).

[18] Die pythagoreische kleine Septime ist das Ergänzungsintervall zum pythagoreischen Ganzton (pythagoreische große Sekunde, großer Ganzton). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime bilden, ist 9 zu 16 respektive 1 zu 16/9 = 1,777778 (= 996,09 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall eines pythagoreischen Ganztones bilden, ist 8 zu 9 respektive 1 zu 9/8 = 1,125000 (= 203,91 Cent).

Lyman-Beta (zweite Linie der ersten Serie) und Balmer-Delta (vierte Linie der zweiten Serie) bilden beide das Intervall eines pythagoreischen Ganztones zum Grenzwert ihrer Serie.

Die Lyman-Alpha-Linie (cis‘‘‘‘) bildet zur Lyman-Beta-Linie (e‘‘‘‘) das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz.[19] Ebenso bildet die Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) zur Balmer-Delta-Linie (e‘‘) das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz.

Das Intervall von der Paschen-Gamma-Linie (h) zur Balmer-Delta-Linie (e‘‘) umfaßt eine Oktave und eine Quarte, zur Lyman-Beta-Linie (e‘‘‘‘) drei Oktaven und eine Quarte.

Das Intervall vom Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) zum Grenzwert der Paschen-Serie (e‘) umfaßt eine Oktave und eine natürliche kleine übermäßige Quarte,[20] zur Balmer-Delta-Linie (e‘‘) zwei Oktaven und eine natürliche kleine übermäßige Quarte und zur Lyman-Beta-Linie (e‘‘‘‘) vier Oktaven und eine natürliche kleine übermäßige Quarte.

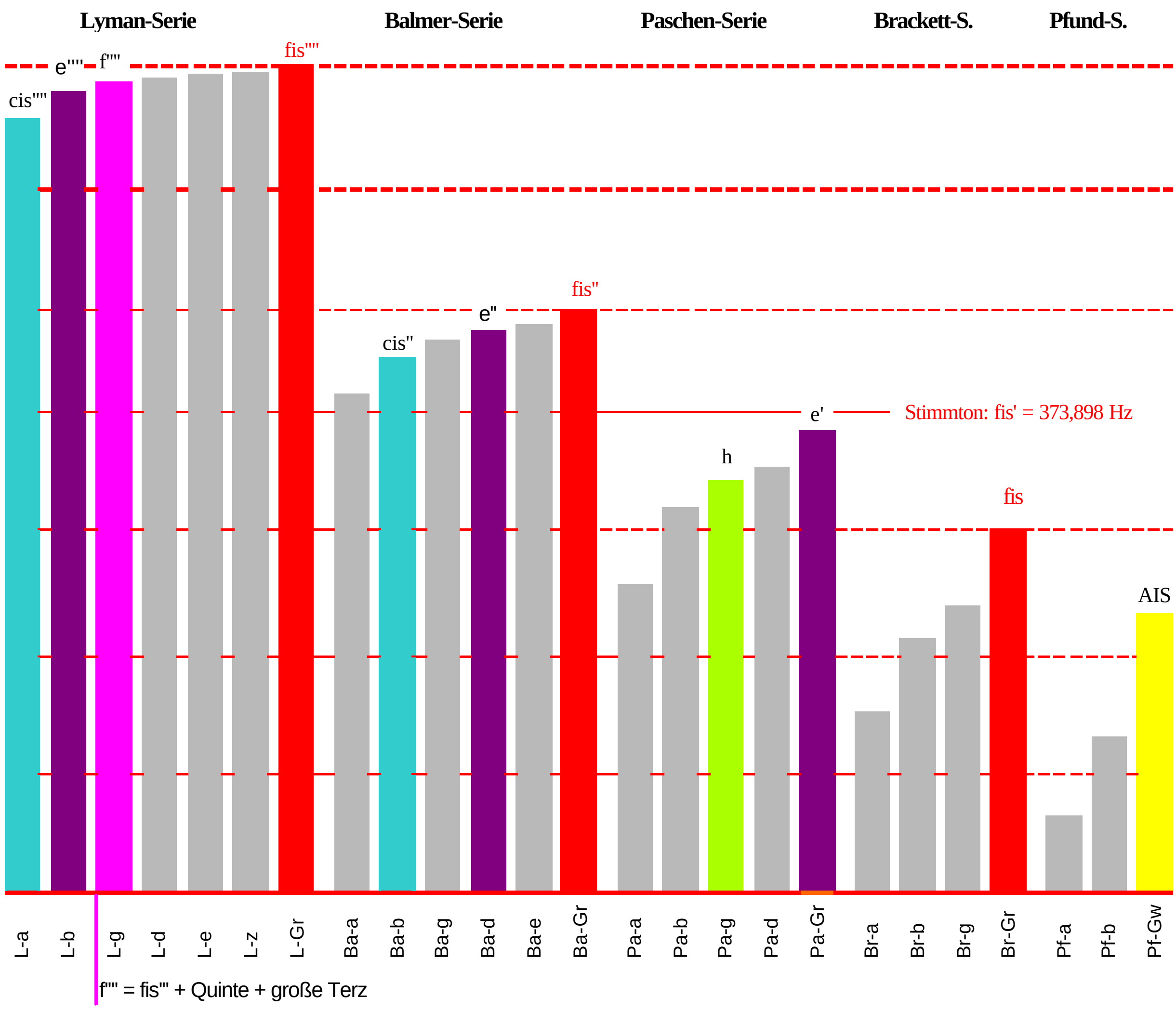
| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | – 2 | | | Pa-Gr | 322,27 Hz | e‘ |
| + 2 | – 2 | | | Ba-d | 664,55 Hz | e‘‘ |
| + 4 | – 2 | | | L-b | 2.658,19 Hz | e‘‘‘‘ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[19] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz bilden, ist 27 zu 32 respektive 1 zu 32/27 = 1,185185 (= 294,13 Cent). Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen kleinen Terz ist die pythagoreische große Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Sexte bilden, ist 16 zu 27 respektive 1 zu 27/16 = 1,687500 (= 905,87 Cent).

[20] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Quarte bilden, ist 18 zu 25 respektive 1 zu 25/18 = 1,388889 (= 568,72 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Quarte ist die natürliche große verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quinte bilden, ist 25 zu 36 respektive 1 zu 36/25 = 1,440000 (= 631,28 Cent).

### 2.1.6 Einfaches Quintintervall und einfaches Terzintervall – Lyman-Gamma




Die Gamma-Linie der Lyman-Serie (L-g = L-γ) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine natürliche große Septime (nicht zu verwechseln mit der Naturseptime)[21] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Gamma-Linie (L-g) entspricht der Ton f'''' mit einer Frequenz von 2.803,56 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis' die Oktave zum fis'' (= Grenzwert der Balmer-Serie) bildet, dann die Oktave zum fis''', dann die Quinte zum cis'''' (= Alpha-Linie der Lyman-Serie) und schließlich die große natürliche Terz zum f''''. Der Ton der Lyman-Gamma-Linie liegt eine natürliche kleine Sekunde (natürlicher kleiner Halbton) tiefer als der Ton des Lyman-Grenzwertes (fis'''' mit 2.990,47 Hz).

Die Lyman-Beta-Linie (e'''') bildet zur Lyman-Gamma-Linie das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Prime (großes Chroma).[22]

---

[21] Die natürliche große Septime ist das Ergänzungsintervall zum natürlichen kleinen Halbton (natürliche kleine Sekunde). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Septime bilden, ist 8 zu 15 respektive 1 zu 15/8 = 1,875000 (= 1.088,27 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Sekunde bilden, ist 15 zu 16 respektive 1 zu 16/15 = 1,066667 (= 111,73 Cent).

Der Naturseptime entspricht das Frequenzverhältnis von 4 zu 7 respektive von 1 zu 7/4 = 1,750000 (= 968,83 Cent).

[22] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Prime (großes Chroma) bilden, ist 128 zu 135 respektive 1 zu 135/128 = 1,054688 (= 92,18 Cent).

Die Lyman-Alpha-Linie (cis‘‘‘) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall einer natürlichen großen Terz.[23]

Die Paschen-Gamma-Linie (h) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von drei Oktaven und einer natürlichen großen übermäßigen Quarte.[24]

Der Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von vier Oktaven und einer natürlichen doppelt übermäßigen Quarte.[25]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 2 | + 1 | + 1 | | L-g | 2.803,56 Hz | f‘‘‘‘ |

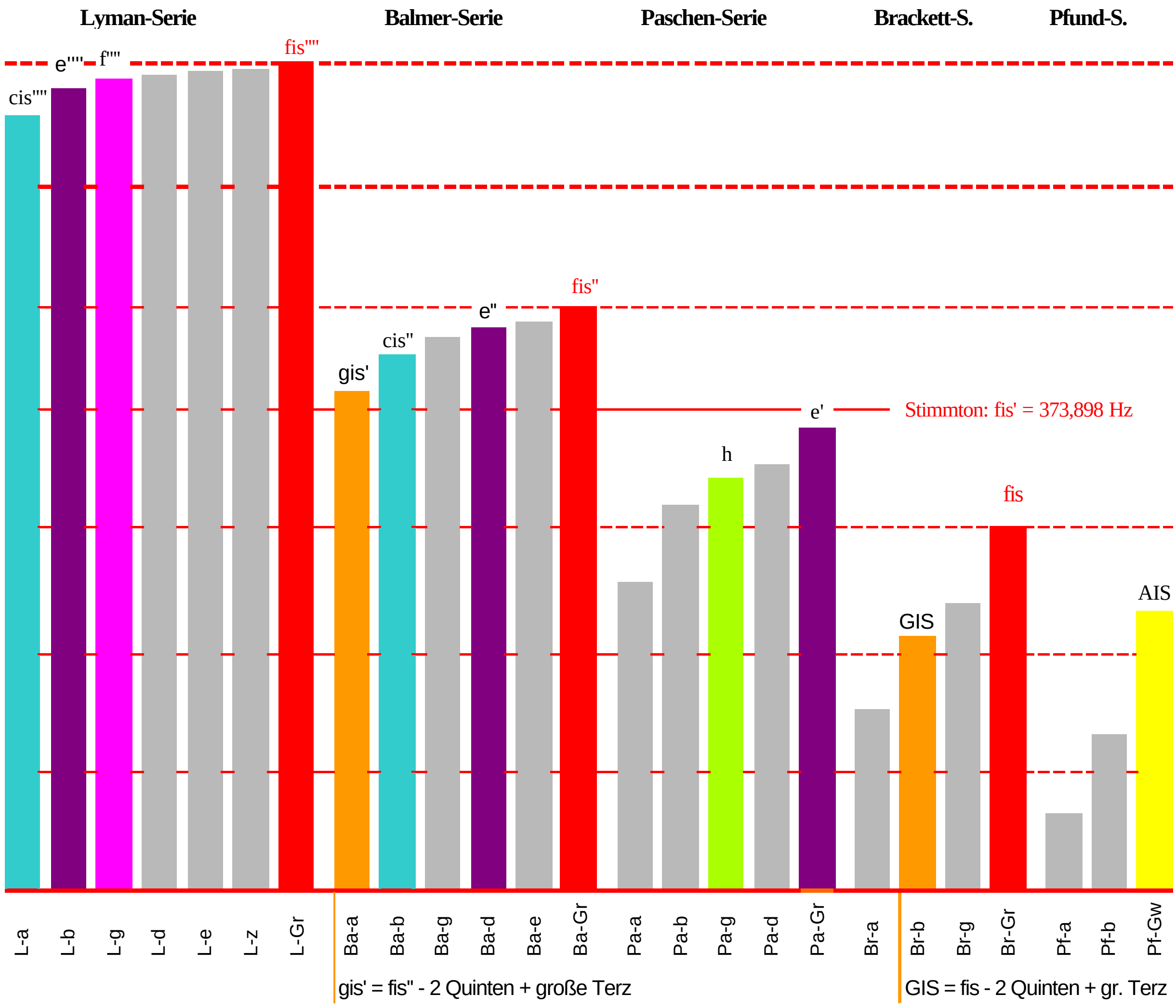
Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

23 Die natürliche große Terz ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Terz bilden, ist 4 zu 5 respektive 1 zu 5/4 = 1,250000 (= 386.31 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Sexte bilden, ist 5 zu 8 respektive 1 zu 8/5 = 1,600000 (= 813,69 Cent).

24 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Quarte bilden, ist 32 zu 45 respektive 1 zu 45/32 = 1,406250 (= 590,22 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen übermäßigen Quarte ist die natürliche kleine verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen verminderten Quinte bilden, ist 45 zu 64 respektive 1 zu 64/45 = 1,422222 (= 609,78 Cent).

25 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt übermäßigen Quarte bilden, ist 256 zu 375 respektive 1 zu 375/256 = 1,464844 (= 660,90 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen doppelt übermäßigen Quarte ist die natürliche doppelt verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt verminderten Quinte bilden, ist 375 zu 512 respektive 1 zu 512/375 = 1,365333 (= 539,10 Cent).

### 2.1.7 Doppeltes Quintintervall und einfaches Terzintervall – Balmer-Alpha, Brackett-Beta




Die Alpha-Linie der Balmer-Serie (Ba-a = Ba-α) in der 40. Unteroktave liegt einen kleinen Ganzton (natürliche große Sekunde)[26] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Balmer-Alpha-Linie (L-a) entspricht der Ton gis‘ mit einer Frequenz von 415,34 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Oktave zum fis‘‘ bildet, dann die Unterquinte zum h‘ (= Oktavton der Gamma-Linie der Paschen-Serie), dann die Unterquinte zum e‘ (= Grenzwert der Paschen-Serie) und schließlich die große natürliche Terz zum gis‘. Der Ton der Balmer-Alpha-Linie liegt eine natürliche kleine Septime tiefer als der Ton des Balmer-Grenzwertes (fis‘‘ mit 747,62 Hz).

Die Beta-Linie der Brackett-Serie (Br-b = Br-β) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktave tiefer als die Alpha-Linie der Balmer-Serie (Ba-a = Ba-α). Die Brackett-Beta-Linie (Br-b) entspricht dem Ton GIS mit einer Frequenz von 103,84 Hz. Der Ton der Brackett-Beta-Linie liegt eine natürliche kleine Septime tiefer als der Ton des Brackett-Grenzwertes (fis mit 186,90 Hz).

26 Der kleine Ganzton (natürliche große Sekunde) ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Sekunde bilden, ist 9 zu 10 respektive 1 zu 10/9 = 1,111111 (= 182,40 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Septime bilden, ist 5 zu 9 respektive 1 zu 9/5 = 1,800000 (= 1.017,60 Cent).

Die Balmer-Alpha-Linie (gis‘) bildet zur Balmer-Beta Linie (cis‘‘) das Intervall einer scharfen Quarte (akuten Quarte).[27]

Die Balmer-Alpha-Linie (gis‘) bildet zur Balmer-Delta-Linie (e“) das Intervall einer natürlichen kleinen Sexte.[28]

Die Paschen-Gamma-Linie (h) bildet zur Balmer-Alpha-Linie (gis‘) das Intervall einer natürlichen großen Sexte.[29]

Die Bracket-Beta-Linie (GIS) bildet zum Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) das Intervall einer natürlichen großen verminderten Terz.[30]

Die Balmer-Alpha-Linie (gis‘) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von zwei Oktaven und einer pythagoreischen großen Sexte.[31]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | – 2 | + 1 | | Br-b | 103,84 Hz | GIS |
| + 1 | – 2 | + 1 | | Ba-a | 415,34 | gis‘ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[27] Der scharfe Quarte (akute Quarte) ist das Ergänzungsintervall zur ernsten Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer scharfen Quarte bilden, ist 20 zu 27 respektive 1 zu 27/20 = 1,1,350000 (= 519,55 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer ernsten Quinte bilden, ist 27 zu 40 respektive 1 zu 40/27 = 1,481481 (= 680,45 Cent).

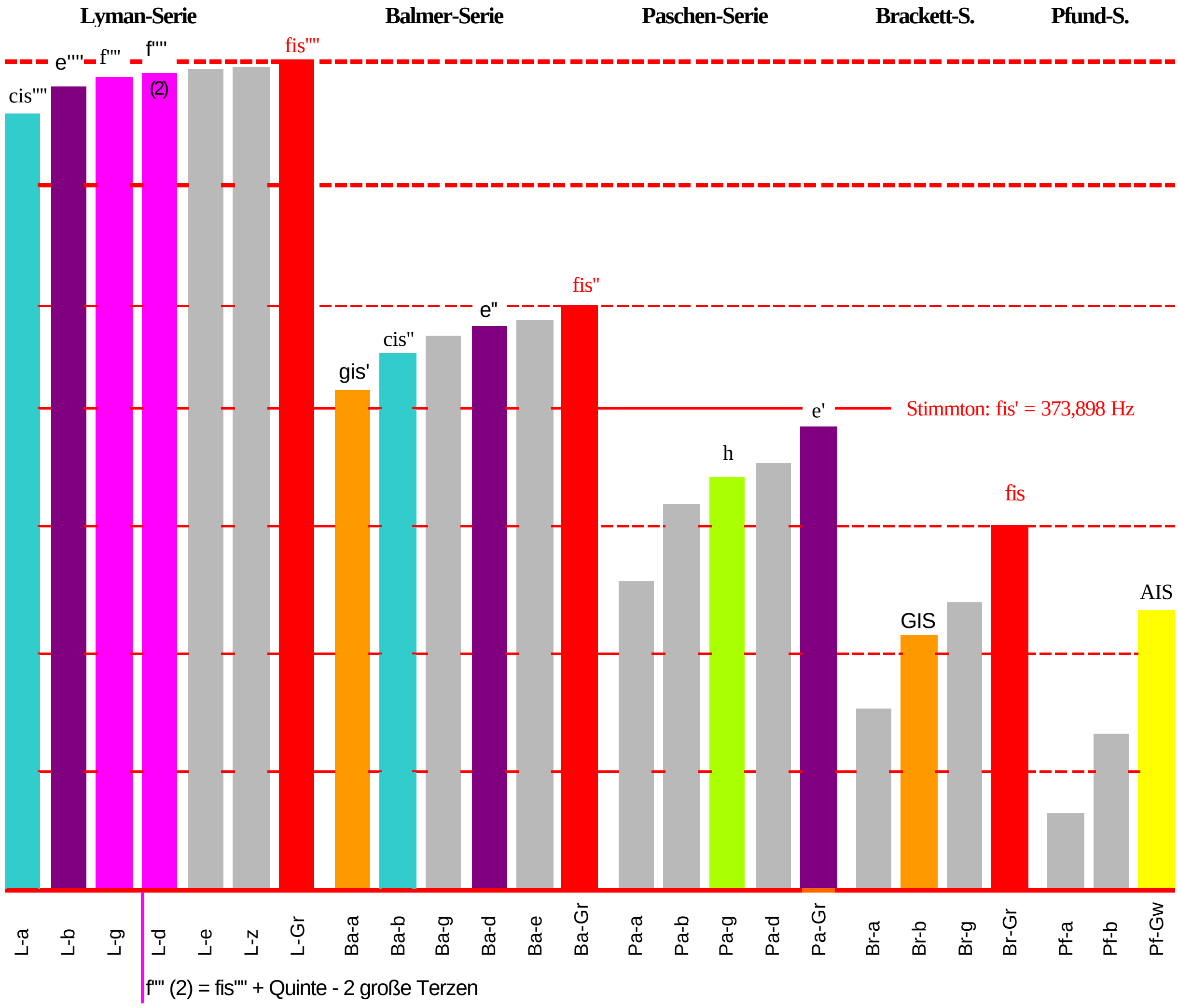
[28] Die natürliche große Terz ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Terz bilden, ist 4 zu 5 respektive 1 zu 5/4 = 1,250000 (= 386.31 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Sexte bilden, ist 5 zu 8 respektive 1 zu 8/5 = 1,600000 (= 813,69 Cent).

[29] Die natürliche große Sexte istdas Ergänzungsintervall zurnatürlichen kleinen Terz. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Sexte bilden, ist 3 zu 5 respektive 1 zu 5/3 = 1,666667 (= 884,36 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Terz bilden, ist 5 zu 6 respektive 1 zu 6/5 = 1,200000 (= 315,64 Cent).

[30] Die natürliche große verminderte Terz ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Terz bilden, ist 125 zu 144 respektive 1 zu 144/125 = 1,152000 (= 244,97 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Sexte bilden, ist 72 zu 125 respektive 1 zu 125/72 = 1,736111 (= 955,03 Cent).

[31] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Sexte bilden, ist 16 zu 27 respektive 1 zu 27/16 = 1,687500 (= 905,87 Cent). Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen großen Sexte ist die pythagoreische kleine Terz. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz bilden, ist 27 zu 32 respektive 1 zu 32/27 = 1,185185 (= 294,13 Cent).

### 2.1.8 Einfaches Quintintervall und doppeltes Terzintervall – Lyman-Delta




Die Delta-Linie der Lyman-Serie (L-d = L-δ) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine große verminderte Oktave[32] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Delta-Linie (L-d) entspricht der Ton f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$ mit einer Frequenz von 2.870,85 Hz. Das f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$ der Delta-Linie der Lyman-Serie ist eine kleine Diesis[33] höher als das f‘‘‘‘ der Gamma-Linie der Lyman-Serie. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Oktave zum fis‘‘ (= Grenzwert der Balmer-Serie) bildet, dann die Oktave zum fis‘‘‘, dann die Quinte zum cis‘‘‘‘ (= Alpha-Linie der Lyman-Serie), dann die Unterterz zum a‘‘‘, dann die Unterterz zum f‘‘‘$_{(Nr.2)}$ und schließlich vom f‘‘‘$_{(Nr.2)}$ die Oktave zum f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$. Der Ton der Lyman-Delta-Linie liegt eine natürliche kleine übermäßige Prime (kleines Chroma) tiefer als der Ton des Lyman-Grenzwertes (fis““ mit 2.990,47 Hz).

---

32 Die große verminderte Oktave ist das Ergänzungsintervall zum kleinen Chroma (natürliche kleine übermäßige Prime = Intervall zwischen der natürlichen kleinen Terz und der natürlichen großen Terz). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer großen verminderten Oktave bilden, ist 25 zu 48 respektive 1 zu 48/25 = 1,920000 (= 1.129,32 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Prime bilden, ist 24 zu 25 respektive 1 zu 25/24 = 1,041667 (= 70,67 Cent).

33 Die kleine Diesis ist das Intervall, das durch drei große Terzen einerseits und einer Oktave andererseits gebildet wird. Drei große Terzen sind um eine kleine Diesis kleiner als eine Oktave. Der kleinen Diesis entspricht das Frequenzverhältnis von 125 zu 128 respektive von 1 zu 128/125 = 1,024000 (= 41,06 Cent).

Die Lyman-Beta-Linie (e‘‘‘‘) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall: großes Limma.[34]

Die Lyman-Alpha-Linie (cis‘‘‘‘) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quarte.[35]

Die Balmer-Alpha-Linie (gis‘) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von zwei Oktaven und einer natürlichen großen verminderten Septime.[36]

Die Paschen-Gamma-Linie (h) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von drei Oktaven und einer natürlichen großen verminderten Quinte.[37]

Der Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von vier Oktaven und einer reinen Quinte.

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 3 | + 1 | – 2 | | L-d | 2.870,85 Hz | f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

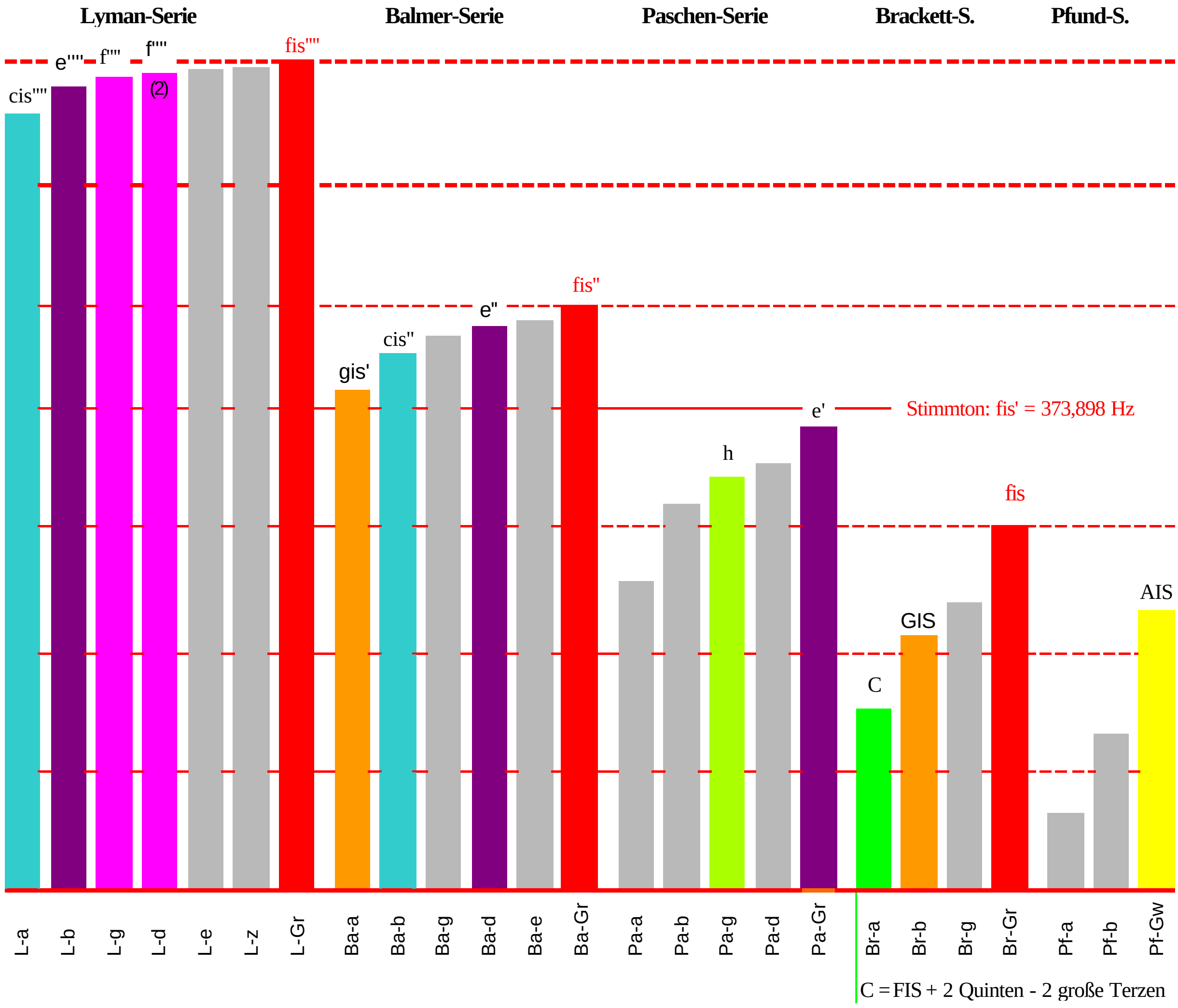
[34] Das große Limma ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen „kleinen“ großen Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die ein großes Limma bilden, ist 25 zu 27 respektive 1 zu 27/25 = 1,080000 (= 133,24 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen „kleinen“ großen Septime bilden, ist 27 zu 50 respektive 1 zu 50/27 = 1,851852 (= 1.066,76 Cent).

[35] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quarte bilden, ist 25 zu 32 respektive 1 zu 32/25 = 1,280000 (= 427,37 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen verminderten Quarte ist die natürliche kleine übermäßige Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Quinte bilden, ist 16 zu 25 respektive 1 zu 25/16 = 1,562500 (= 772,63 Cent).

[36] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Septime bilden, ist 125 zu 216 respektive 1 zu 216/125 = 1,728000 (= 946,92 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen verminderten Septime ist die natürliche kleine übermäßige Sekunde. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde bilden, ist 108 zu 125 respektive 1 zu 125/108 = 1,157407 (= 253,08 Cent).

[37] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quinte bilden, ist 25 zu 36 respektive 1 zu 36/25 = 1,440000 (= 631,28 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen verminderten Quinte ist die natürliche kleine übermäßige Quarte Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Quarte bilden, ist 18 zu 25 respektive 1 zu 25/18 = 1,388889 (= 568,72 Cent).

### 2.1.9 Doppeltes Quintintervall und doppeltes Terzintervall – Brackett-Alpha




Die Alpha-Linie der Brackett-Serie (Br-a = Br-$\alpha$) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine natürliche kleine übermäßige Quarte[38] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Brackett-Alpha-Linie (Br-a) entspricht der Ton C mit einer Frequenz von 67,29 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Quinte zum cis‘‘ (= Beta-Linie der Balmer-Serie) bildet, dann die Quinte zum gis‘‘, dann die Unteroktave zum gis‘, dann die Unteroktave zum gis, dann die Unteroktave zum GIS, dann die Unterterz zum E und schließlich vom E die Unterterz zum C. Der Ton der Brackett-Alpha-Linie liegt eine Oktave eine natürliche kleine übermäßige Quarte tiefer als der Ton des Brackett-Grenzwertes (fis mit 186,90 Hz).

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zum Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime.[39]

[38] Die natürliche kleine übermäßige Quarte ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen verminderten Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Quarte bilden, ist 18 zu 25 respektive 1 zu 25/18 = 1,388889 (= 568,72 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quinte bilden, ist 25 zu 36 respektive 1 zu 36/25 = 1,440000 (= 631,28 Cent).

[39] Die pythagoreische kleine Septime ist das Ergänzungsintervall zum pythagoreischen Ganzton (pythagoreische große Sekunde, großer Ganzton). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime bilden, ist 9 zu 16 respektive 1 zu 16/9 = 1,777778 (= 996,09 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall eines pythagoreischen Ganztones bilden, ist 8 zu 9 respektive 1 zu 9/8 = 1,125000 (= 203,91 Cent).

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zur Paschen-Gamma-Linie (h) das Intervall von einer Oktave und einer natürlichen „kleinen“ großen Septime.[40]

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zur Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) das Intervall von drei Oktaven und einer natürlichen kleinen übermäßigen Prime (kleines Chroma).[41]

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von fünf Oktaven und einer natürlichen kleinen übermäßigen Terz.[42]

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von fünf Oktaven und einer reinen Quarte.

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 3 | + 2 | – 2 | | Br-a | 67,29 Hz | C |

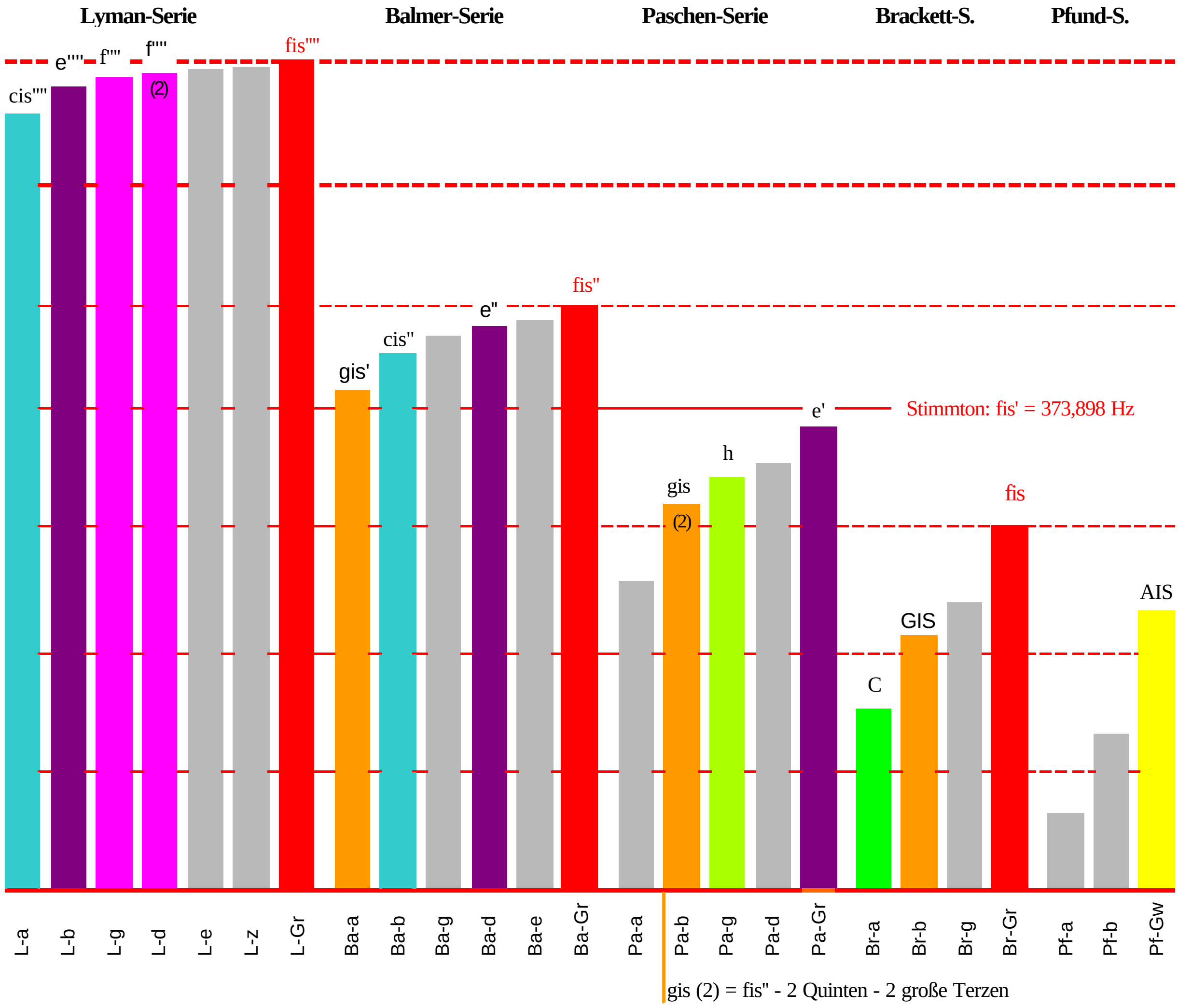
Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

40 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen „kleinen“ großen Septime bilden, ist 27 zu 50 respektive 1 zu 50/27 = 1,851852 (= 1.066,76 Cent). Das große Limma ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen „kleinen“ großen Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die ein großes Limma bilden, ist 25 zu 27 respektive 1 zu 27/25 = 1,080000 (= 133,24 Cent).

41 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Prime bilden, ist 24 zu 25 respektive 1 zu 25/24 = 1,041667 (= 70,67 Cent). Die große verminderte Oktave ist das Ergänzungsintervall zum kleinen Chroma (natürliche kleine übermäßige Prime = Intervall zwischen der natürlichen kleinen Terz und der natürlichen großen Terz). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer großen verminderten Oktave bilden, ist 25 zu 48 respektive 1 zu 48/25 = 1,920000 (= 1.129,32 Cent).

42 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Terz bilden, ist 96 zu 125 respektive 1 zu 125/96 = 1,302083 (= 456,99 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Terz ist die natürliche große verminderte Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Sexte bilden, ist 125 zu 192 respektive 1 zu 192/125 = 1,536000 (= 743,01 Cent).

## 2.1.10 Doppeltes Quintintervall und doppeltes Terzintervall – Paschen-Beta




Die Beta-Linie der Paschen-Serie (Pa-b = Pa-β) in der 40. Unteroktave liegt eine natürliche große übermäßige Sexte[43] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Paschen-Beta-Linie (Pa-b) entspricht der Ton $gis_{(Nr.2)}$ mit einer Frequenz von 212,66 Hz. Dieses $gis_{(Nr.2)}$ ist um eine kleine Diesis[44] größer als das oktavanaloge gis der Balmer-Alpha-Linie respektive der Brackett-Beta-Linie. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Unterquinte zum h (= Gamma-Linie der Paschen-Serie) bildet, dann die Unterquinte zum e (= Unteroktave des Paschen-Grenzwertes), dann die Oktave zum e‘ (= Paschen-Grenzwert), dann die Unterterz zum c und dann schließlich die Unterterz zum $gis_{(Nr.2)}$. Der Ton der Paschen-Beta-Linie liegt zwei große Terzen (= kleine übermäßige Quinte)[45] tiefer als der Ton des Paschen-Grenzwertes (e‘ mit 332,27 Hz).

43 Die große natürliche übermäßige Sexte ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen verminderten Terz. Der natürlichen großen übermäßigen Sexte entspricht das Frequenzverhältnis von 128 zu 225 respektive von 1 zu 225/128 = 1,7578125 (= 976,54 Cent), der natürlichen kleinen verminderten Terz entspricht das Frequenzverhältnis von 225 zu 256 respektive von 1 zu 256/225 = 1,137778 (= 223,46 Cent).

44 Die kleine Diesis ist das Intervall, das durch drei große Terzen einerseits und einer Oktave andererseits gebildet wird. Drei große Terzen sind um eine kleine Diesis kleiner als eine Oktave. Der kleinen Diesis entspricht das Frequenzverhältnis von 125 zu 128 respektive von 1 zu 128/125 = 1,024000 (= 41,06 Cent).

45 Der kleinen übermäßigen Quinte entspricht das Frequenzverhältnis von 16 zu 25 respektive von 1 zu 25/16 = 1,562500 (= 772,63 Cent).

Die Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) bildet zur Paschen-Gamma-Linie (h) das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Sekunde.[46]

Der Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) bildet zur Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime.[47]

Die Brackett-Alpha-Linie (C) bildet zur Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) das Intervall von einer Oktave und einer pythagoreischen kleinen Sexte.[48]

Die Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von drei Oktave und einer natürlichen doppelt übermäßigen Quinte.[49]

Die Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) bildet zur Lyman-Delta-Linie (f““$_{(Nr.2)}$) das Intervall von drei Oktaven und einer pythagoreischen großen Sexte.[50]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | – 2 | – 2 | | Pa-b | 212,66 Hz | gis $_{(Nr.2)}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

46 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen übermäßigen Sekunde bilden, ist 64 zu 75 respektive 1 zu 75/64 = 1,171675 (= 274,58 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen großen übermäßigen Sekunde ist die natürliche kleine verminderte Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen verminderten Septime bilden, ist 75 zu 128 respektive 1 zu 128/75 = 1,706667 (= 925,42 Cent).

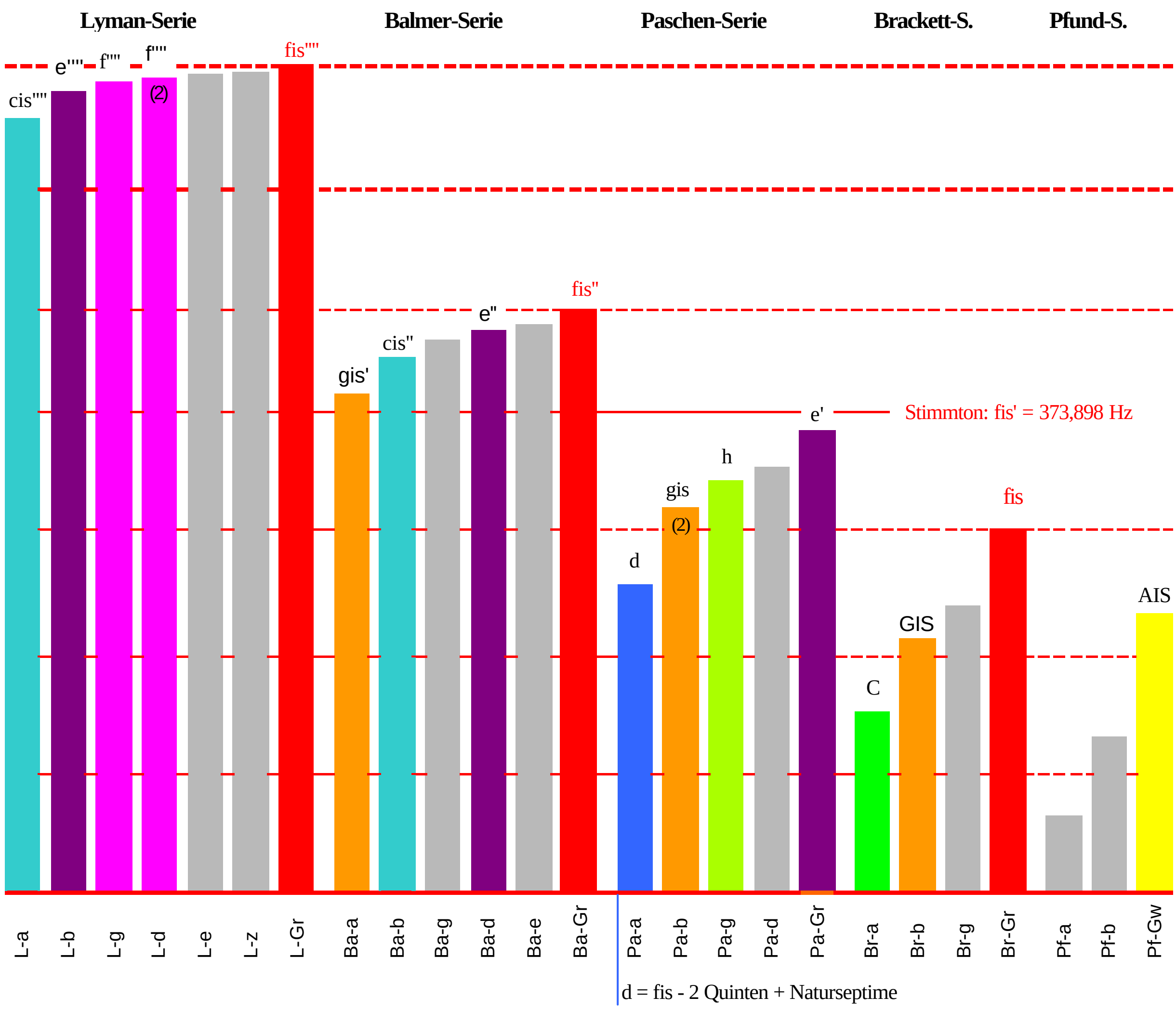
47 Die pythagoreische kleine Septime ist das Ergänzungsintervall zum pythagoreischen Ganzton (pythagoreische große Sekunde, großer Ganzton). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Septime bilden, ist 9 zu 16 respektive 1 zu 16/9 = 1,777778 (= 996,09 Cent). Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall eines pythagoreischen Ganztones bilden, ist 8 zu 9 respektive 1 zu 9/8 = 1,125000 (= 203,91 Cent).

48 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Sexte bilden, ist 81 zu 128 respektive 1 zu 128/81 = 1,580247 (= 792,18 Cent). Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen kleinen Sexte ist die pythagoreische große Terz. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Terz bilden, ist 64 zu 81 respektive 1 zu 81/64 = 1,265625 (= 407,82 Cent).

49 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt übermäßigen Quinte bilden, ist 2048 zu 3375 respektive 1 zu 3375/2048 = 1,647949 (= 864,81 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen doppelt übermäßigen Quinte ist die natürliche doppelt verminderte Quarte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt verminderten Quarte bilden, ist 3375 zu 4096 respektive 1 zu 4096/3375 = 1,213630 (= 335,19 Cent).

50 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Sexte bilden, ist 16 zu 27 respektive 1 zu 27/16 = 1,687500 (= 905,87 Cent). Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen großen Sexte ist die pythagoreische kleine Terz. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Terz bilden, ist 27 zu 32 respektive 1 zu 32/27 = 1,185185 (= 294,13 Cent).

### 2.1.11 Doppeltes Quintintervall und Naturseptime – Paschen-Alpha




Die Alpha-Linie der Paschen-Serie (Pa-a = Pa-$\alpha$) in der 40. Unteroktave liegt eine Oktave und eine septimale leicht übermäßige große Terz[51] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Paschen-Alpha-Linie (Pa-a) entspricht der Ton d mit einer Frequenz von 145,37 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man zuerst vom fis‘ die Unterquinte zum h (= Paschen-Gamma-Linie) bildet, dann die Unterquinte zum e (= Unteroktave des Grenzwertes der Paschen-Serie), dann die Unteroktave zum E und dann schließlich die Naturseptime nach oben zum d. Der Ton der Alpha-Linie der Paschen-Serie liegt eine Oktave und eine septimale leicht übermäßige große Sekunde (chinesischen Ganzton)[52] tiefer als der Paschen-Grenzwert (e‘ mit 332,27 Hz).

[51] Dem Intervall einer septimalen leicht übermäßigen großen Terz entspricht der Intervallfaktor 9/7 = 1,285715 (= 435,08 Cent). Zum Vergleich: einer natürlichen großen Terz entspricht der Intervallfaktor 5/4 = 1,250000 (= 386,31 Cent), einer gleichmäßigen großen Terz entspricht der Intervallfaktor 1,259921 (= 400,00 Cent), einer pythagoreischen großen Terz entspricht der Intervallfaktor 81/64 = 1,265625 (= 407,82 Cent), einer großen verminderten Quarte (natürliche große Terz + kleine Diesis) entspricht der Intervallfaktor 32/25 = 1,280000 (= 427,37 Cent) und einer klassisch verminderten Quarte (große Terz + große Diesis) entspricht der Intervallfaktor 162/125 = 1,296000 (= 448,88 Cent).

[52] Die septimale leicht übermäßige große Sekunde (chinesischer Ganzton) ist das Ergänzungsintervall zur Naturseptime. Dem chinesischen Ganzton entspricht der Intervallfaktor von 7 zu 8 respektive von 1 zu 8/7 = 1,142857 (= 231,17 Cent). Der Naturseptime entspricht der Intervallfaktor von 4 zu 7 respektive von 1 zu 7/4 = 1,750000 (= 968,83 Cent).

Die Paschen-Gamma-Linie (h) bildet zur Paschen-Alpha-Linie (d) das Intervall einer septimalen leicht verminderten kleinen Terz.[53]

Die Paschen-Alpha-Linie (d) bildet zur Balmer-Beta-Linie (cis‘‘) das Intervall von einer Oktave und einer septimalen leicht übermäßigen großen Septime.[54]

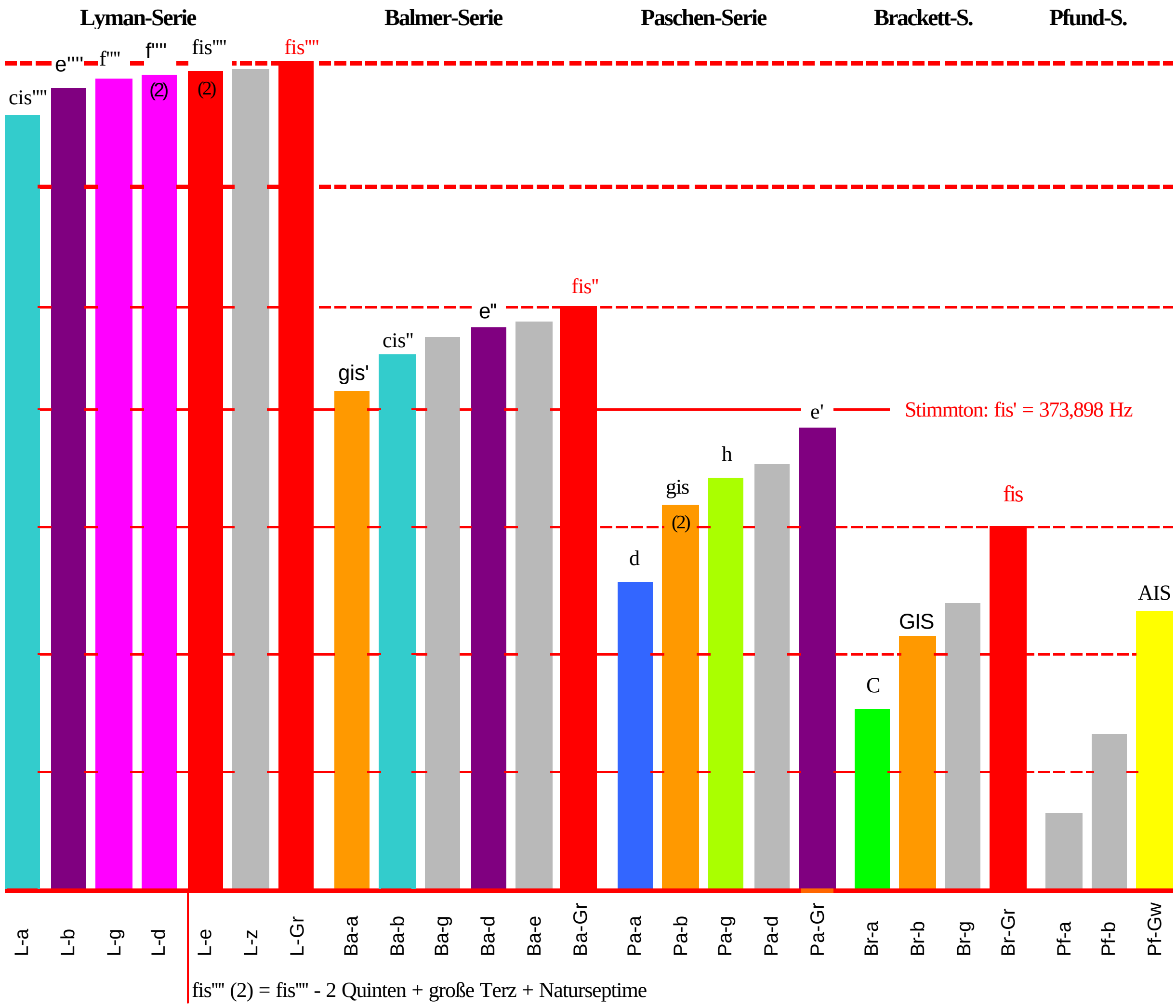
| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | – 2 | | + 1 | Pa-a | 145,37 Hz | d |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[53] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen leicht verminderten kleinen Terz bilden, ist 6 zu 7 respektive 1 zu 7/6 = 1,166667 (= 266,87 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen leicht verminderten kleinen Terz ist die septimale leicht übermäßige große Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen leicht übermäßigen großen Sexte bilden, ist 7 zu 12 respektive 1 zu 12/7 = 1,714286 (= 933,13 Cent).

[54] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen leicht übermäßigen großen Septime bilden, ist 14 zu 27 respektive 1 zu 27/14 = 1,928571 (= 1.137,04 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen leicht übermäßigen großen Septime ist die septimale leicht verminderte kleine Sekunde. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen leicht verminderten kleinen Sekunde bilden, ist 27 zu 28 respektive 1 zu 28/27 = 1,037037 (= 62,96 Cent).

## 2.1.12 Doppeltes Quintintervall und Terzintervall und Naturseptime – Lyman-Epsilon




Die Epsilon-Linie der Lyman-Serie (L-e = L-ε) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine septimale „mittlere“ übermäßige Septime[55] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Epsilon-Linie (L-e) entspricht der Ton fis‘‘‘‘$_{(\text{Nr.2})}$ mit einer Frequenz von 2.907,40 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom d der Paschen-Alpha-Linie die Terz zum fis$_{(\text{Nr.2})}$ bildet und dann in vier Oktavsprüngen zum fis‘‘‘‘$_{(\text{Nr.2})}$ hochstimmt. Der Ton der Epsilon-Linie der Lyman-Serie liegt eine septimale „mittlere“ verminderte Sekunde[56] tiefer als der Lyman-Grenzwert (fis‘‘‘‘ mit 2.990,47 Hz).

[Mehr zu diesem Intervall in Abschnitt 1.5.3 ab Seite 51, siehe insbesondere Seite 55]

[55] Der Name „septimale mittlere übermäßige Septime“ ist kein überlieferter Begriff aus der Harmonielehre und wurde hier einfach zur Beschreibung dieses Intervalls neu geschaffen (= frei erfunden) und eingesetzt. Das gleiche gilt auch für den Namen des Ergänzungsintervalls „septimale mittlere verminderte Sekunde“. Der septimalen „mittleren“ übermäßigen Septime entspricht der Intervallfaktor von 18 zu 35 respektive von 1 zu 35/18 = 1,944444 (= 1.151,23 Cent), der großen übermäßigen Septime entspricht der Intervallfaktor von 1.024 zu 2.025 respektive 1 zu 2.025/1.024 = 1,977539 (= 1.180,44 Cent), der „kleinen“ großen übermäßigen Septime (dies ist ein überlieferter Begriff aus der Harmonielehre) entspricht der Intervallfaktor von 64 zu 125 respektive von 1 zu 125/64 = 1,953125 (= 1.158,94 Cent) und der großen verminderten Oktave entspricht der Intervallfaktor von 25 zu 48 respektive von 1 zu 48/25 = 1,920000 (= 1.129,33 Cent).

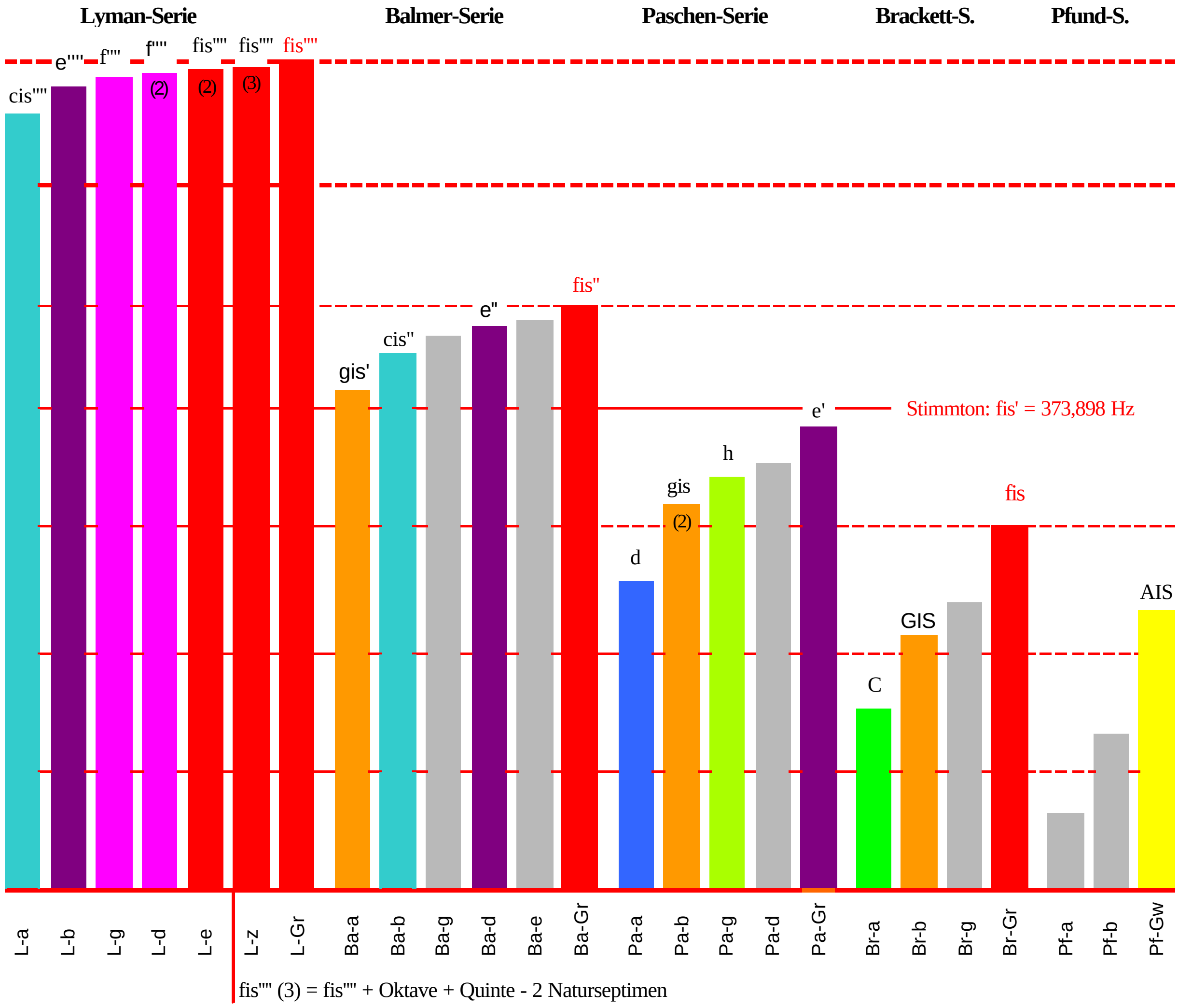
[56] Dem Intervall septimale „mittlere“ verminderte Sekunde entspricht der Intervallfaktor von 35 zu 36 respektive von 1 zu 36/35 = 1,028571 (= 48,77 Cent).

Die Paschen-Alpha-Linie (d) bildet zur Lyman-Epsilon-Linie (fis‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von vier Oktaven und einer großen Terz.

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | – 2 | + 1 | + 1 | L-e | 2.907,40 Hz | fis‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

## 2.1.13 Quintintervall und doppeltes Naturseptimintervall – Lyman-Zeta




Die Zeta-Linie der Lyman-Serie (L-z = L-ζ ) in der 40. Unteroktave liegt zwei Oktaven und eine septimale verminderte Oktave[57] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Lyman-Zeta-Linie (L-z) entspricht der Ton fis‘‘‘‘$_{(\text{Nr.3})}$ mit einer Frequenz von 2.929,44 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom Ausgangston fis‘ die Quinte zum cis‘‘ (= Beta-Linie der Balmer-Serie) bildet, dann der Reihe nach zwei Naturseptimen nach unten einstimmt, so daß man zum fis$_{(\text{Nr.3})}$ gelangt und dann in vier Oktavsprüngen zum fis‘‘‘‘$_{(\text{Nr.3})}$ hochstimmt. Der Ton der Zeta-Linie der Lyman-Serie liegt eine septimale übermäßige Prime[58] tiefer als der Lyman-Grenzwert (fis‘‘‘‘ mit 2.990,47 Hz).

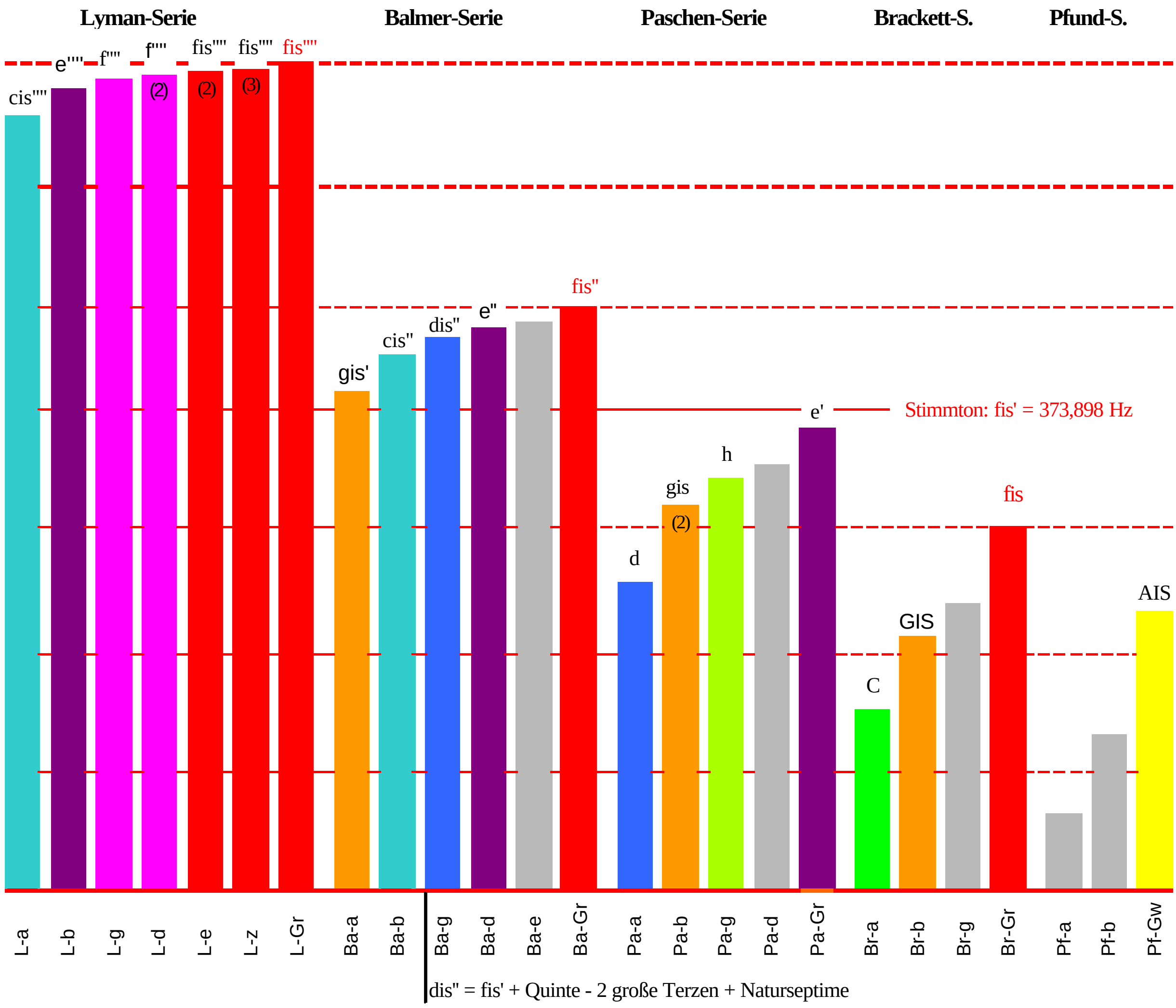
| Oktaven | Quinten | Terzen | Septimen | Linie | Frequenz | Ton |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 4 | + 1 | | – 2 | L-z | 2.929,44 Hz | fis‘‘‘‘$_{(\text{Nr.3})}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[57] Dem Intervall septimale verminderte Oktave entspricht das Frequenzverhältnis von 49 zu 96 respektive von 1 zu 96/49 = 1,959184 (= 1.164,30 Cent).

[58] Dem Intervall septimale übermäßige Prime entspricht das Frequenzverhältnis von 48 zu 49 respektive von 1 zu 49/48 = 1,020833 (= 35,70 Cent).

## 2.1.14 Quintintervall und doppeltes Terzintervall und Naturseptimintervall – Balmer-Gamma




Die Gamma-Linie der Balmer-Serie (Ba-g = Ba-$\gamma$) in der 40. Unteroktave liegt ziemlich genau eine gleichschwebende (gleichmäßige) große Sexte[59] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Balmer-Gamma-Linie (Ba-g) entspricht der Ton dis‘‘ mit einer Frequenz von 628,00 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom Ausgangston fis‘ die Quinte zum cis‘‘ (= Beta-Linie der Balmer-Serie) bildet, dann die Unterterz zum a‘, dann die Unterterz zum f‘ (= 3. Unteroktave der Delta-Linie der Lyman-Serie) und dann schließlich eine Naturseptime nach oben zum dis‘‘. Der Ton der Gamma-Linie der Balmer-Serie liegt ziemlich genau eine gleichschwebende (gleichmäßige) kleine Terz[60] tiefer als der Balmer-Grenzwert (fis‘‘ mit 747,62 Hz).

---

59 Die gleichschwebende (gleichmäßige) große Sexte ist durch den Intervallfaktor $2^{(9/12)} = 2^{0,75} = 1{,}681793$ (= 900,00 Cent) charakterisiert. Die große Sexte, die zwischen dem Stimmton fis‘ und dem dis‘‘ der Balmer-Gamma-Linie liegt, wird durch den Intervallfaktor von 25 zu 42 respektive von 1 zu 42/25 = 1,680000 (= 898,15 Cent) bestimmt. Die Abweichung liegt etwa bei 1,85 Cent, was 1/12 des pythagoreischen Kommas entspricht. Das pythagoreische Komma entspricht der Differenz von 12 Quinten und 7 Oktaven und umfaßt den Intervallfaktor von $2^{-19} \times 3^{12} = 1{,}013643$ (= 23,46 Cent).

60 Die gleichschwebende (gleichmäßige) kleine Terz ist durch den Intervallfaktor $2^{(3/12)} = 2^{0,25} = 1{,}189207$ (= 300,00 Cent) charakterisiert. Die kleine Terz, die zwischen dem dis‘‘ der Balmer-Gamma-Linie und dem Grenzwert fis‘‘ liegt, wird durch den Intervallfaktor von 21 zu 25 respektive von 1 zu 25/21 = 1,190476 (= 301,85 Cent) bestimmt. Die Abweichung liegt etwa bei 1,85 Cent, was 1/12 des pythagoreischen Kommas entspricht.

Die Paschen-Alpha-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) bildet zur Balmer-Gamma-Linie (dis‘‘) das Intervall von einer Oktave und einem großen Limma.[61]

Die Balmer-Gamma-Linie (dis‘‘) bildet zur Lyman-Epsilon-Linie (fis‘‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von zwei Oktaven und einer natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde.[62]

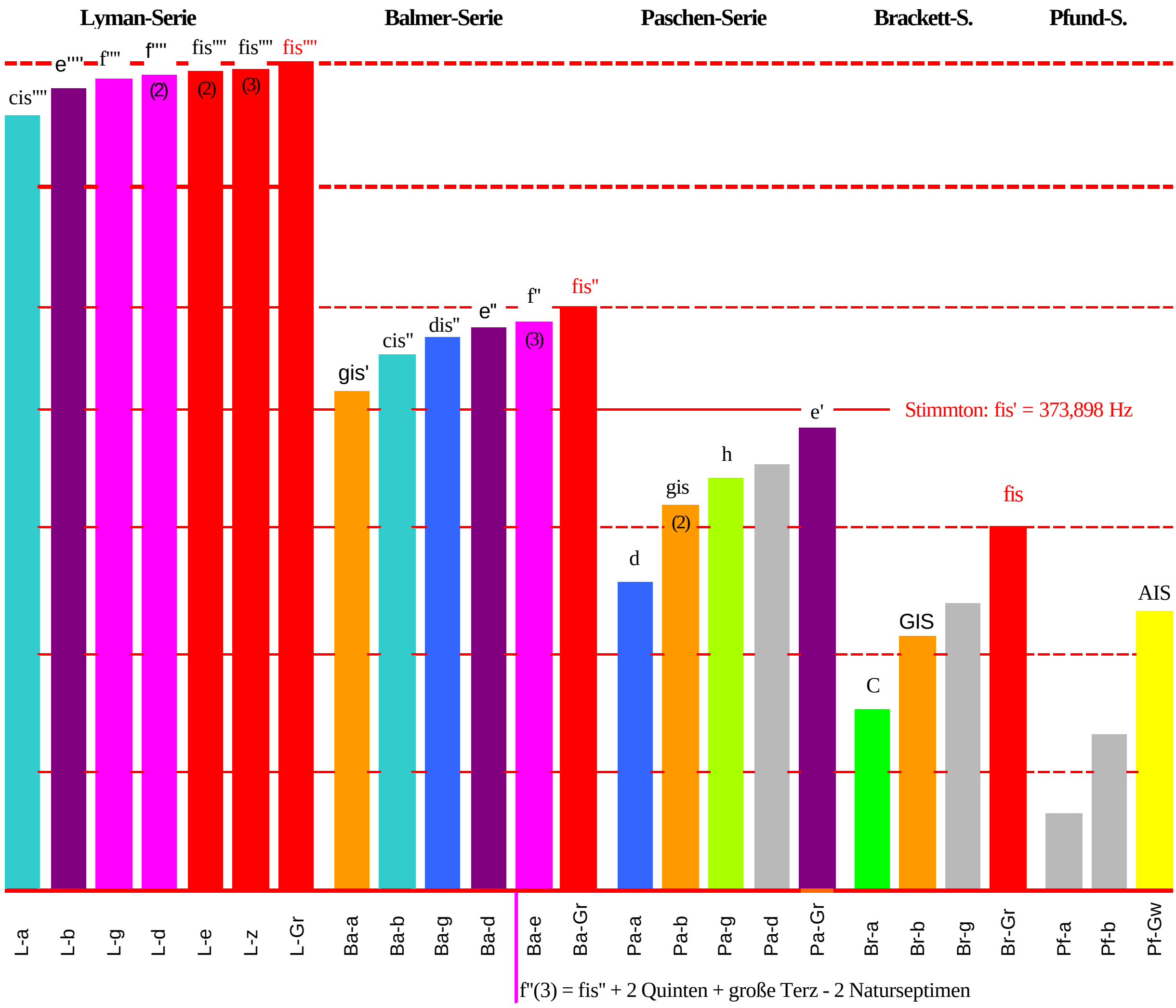
| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | + 1 | – 2 | + 1 | Ba-g | 628,00 Hz | dis‘‘ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

[61] Das Frequenzverhältnis der Töne, die ein großes Limma bilden, ist 25 zu 27 respektive 1 zu 27/25 = 1,080000 (= 133,24 Cent). Das große Limma ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen „kleinen“ großen Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen „kleinen“ großen Septime bilden, ist 27 zu 50 respektive 1 zu 50/27 = 1,851852 (= 1.066,76 Cent).

[62] Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde bilden, ist 108 zu 125 respektive 1 zu 125/108 = 1,157407 (= 253,08 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde ist die natürliche große verminderte Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Septime bilden, ist 125 zu 216 respektive 1 zu 216/125 = 1,728000 (= 946,92 Cent).

### 2.1.15 Doppeltes Quintintervall und Terzintervall und doppeltes Naturseptimintervall – Balmer-Epsilon




Die Epsilon-Linie der Balmer-Serie (Ba-e = Ba-ε) in der 40. Unteroktave liegt ziemlich genau eine gleichschwebende (gleichmäßige) kleine Septime und einen gleichmäßigen Viertelton[63] höher als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Balmer-Epsilon-Linie (Ba-e) entspricht der Ton f‘‘$_{(Nr.3)}$ mit einer Frequenz von 686,59 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom Ausgangston fis‘ die Quinte zum cis‘‘ (= Beta-Linie der Balmer-Serie) bildet, dann die Quinte zum gis‘‘, dann die Terz zum c‘‘‘, dann die Oktave zum c‘‘‘‘ und von dort aus werden der Reihe nach zwei Unterseptimen gebildet, die zum gewünschten Ton f‘‘$_{(Nr.3)}$ führen. Der Ton der Epsilon-Linie der Balmer-Serie liegt ziemlich genau drei gleichmäßige Vierteltöne[64] tiefer als der Balmer-Grenzwert (fis‘‘ mit 747,62 Hz).

[Mehr zu diesem Intervall in Abschnitt 1.5.3 ab Seite 51, siehe insbesondere Seite 55]

[63] Die gleichschwebende (gleichmäßige) kleine Septime ist durch den Intervallfaktor $2^{10/12} = 2^{0,8333} = 1,781797$ (= 1.000,00 Cent) charakterisiert. Der gleichmäßige Viertelton ist definiert durch den Intervallfaktor $2^{1/24} = 2^{0,0415557} = 1,029302$ (= 50,00 Cent). Das Intervall zwischen dem Stimmton fis‘ und dem f‘‘$_{(Nr.3)}$ der Balmer-Epsilon-Linie wird durch den Intervallfaktor von 1,836741 (= 1.052,57 Cent) bestimmt. Das Intervall ist somit um 2,57 Cent größer als eine gleichmäßige kleine Septime zuzüglich eines gleichmäßigen Vierteltones.

[64] Ein gleichmäßiger Viertelton umfaßt 50,00 Cent. Das Intervall vom f‘‘$_{(Nr.3)}$ der Balmer-Epsilon-Linie zum fis‘‘ des Grenzwertes der Balmer-Serie umfaßt 147,43 Cent. Das sind 2,57 Cent weniger als der Intervallraum von drei gleichmäßigen Vierteltönen mit insgesamt 150,00 Cent.

Die Balmer-Epsilon-Linie (f‘‘$_{(Nr.3)}$) bildet zur Lyman-Zeta-Linie (fis‘‘‘‘$_{(Nr.3)}$) das Intervall von zwei Oktaven und einer natürlichen kleinen Sekunde (diatonischer Halbton).[65]

Die Balmer-Epsilon-Linie (f‘‘$_{(Nr.3)}$) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von zwei Oktaven und einer septimalen übermäßigen Prime.[66]

Die Balmer-Alpha-Linie (gis‘) bildet zur Balmer-Epsilon-Linie (f‘‘$_{(Nr.3)}$) das Intervall einer septimalen verminderten großen Sexte.[67]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 1 | + 2 | + 1 | – 2 | Ba-e | 686,59 Hz | f‘‘$_{(Nr.3)}$ |

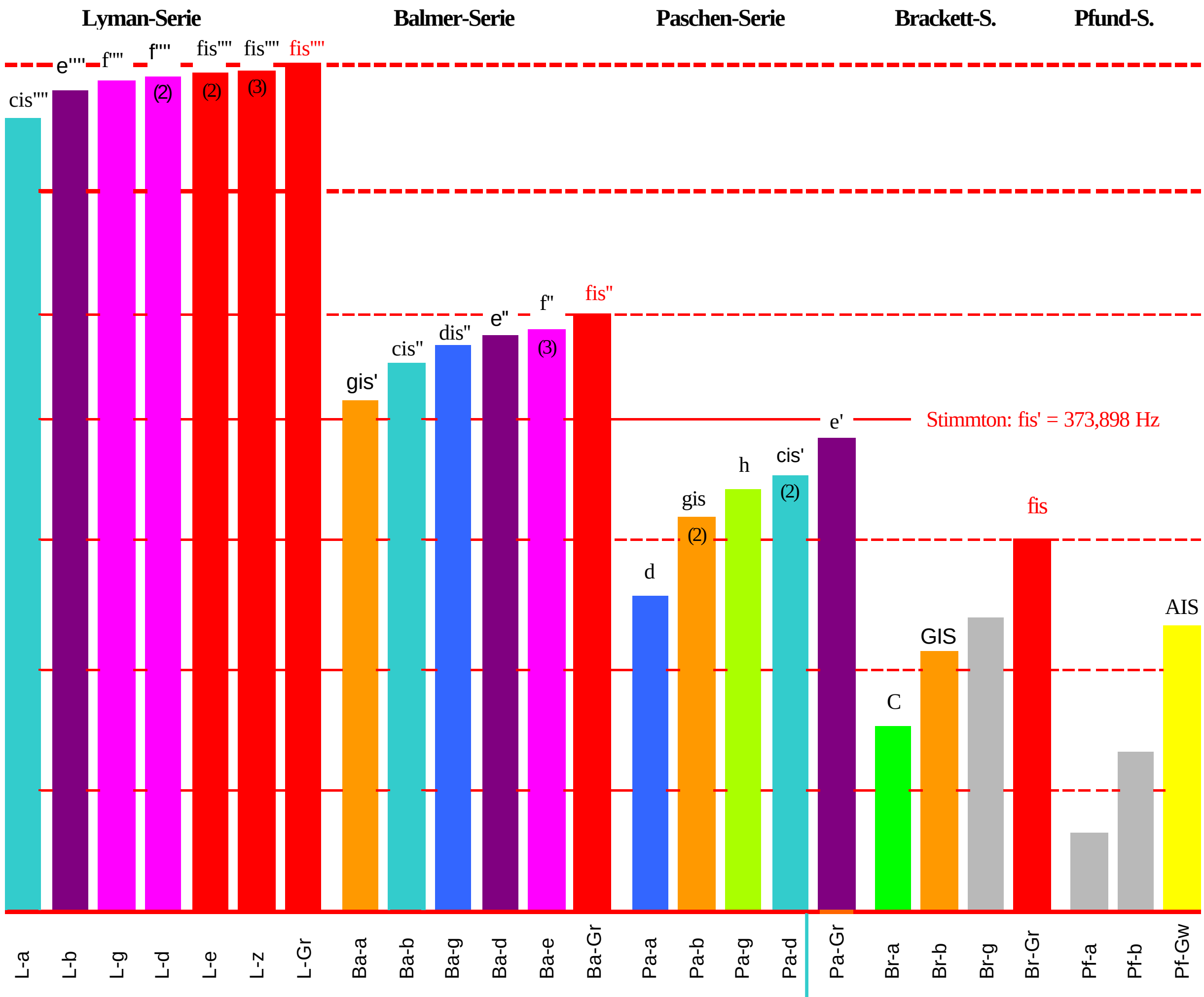
Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

65 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen Sekunde (diatonischer Halbton) bilden, ist 15 zu 16 respektive 1 zu 16/15 = 1,066667 (= 111,73 Cent). Die natürliche große Septime ist das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen Sekunde. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen Septime bilden, ist 8 zu 15 respektive 1 zu 15/8 = 1,875000 (= 1.088,27 Cent).

66 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen Prime bilden, ist 48 zu 49 respektive von 1 zu 49/48 = 1,020833 (= 35,70 Cent). Die septimale verminderte Oktave ist das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen Prime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten Oktave bilden, ist 49 zu 96 respektive von 1 zu 96/49 = 1,959184 (= 1.164,30 Cent).

67 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten große Sexte bilden, ist 49 zu 81 respektive von 1 zu 81/49 = 1,653061 (= 870,17 Cent). Die septimale übermäßige kleine Terz ist das Ergänzungsintervall zur septimalen verminderten großen Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen kleinen Terz bilden, ist 81 zu 98 respektive von 1 zu 98/81 = 1,209877 (= 329,83 Cent).

### 2.1.16 Doppeltes Quintintervall und Terzintervall und doppeltes Naturseptimintervall – Paschen-Delta




cis'(2) = fis''' - 2 Quinten + große Terz - 2 Naturseptimen

Die Delta-Linie der Paschen-Serie (Pa-d = Pa-δ) in der 40. Unteroktave liegt etwas mehr als eine gleichmäßige Quarte und einen gleichmäßigen Viertelton[68] tiefer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Paschen-Delta-Linie (Pa-d) entspricht der Ton cis‘$_{(Nr.2)}$ mit einer Frequenz von 271,24 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom fis‘ zuerst zwei Oktaven hochstimmt zum fis‘‘‘, dann die Unterquinte zum h‘‘ bildet, dann die Unterquinte zum e‘‘ (= Delta-Linie der Balmer-Serie), dann eine große Terz nach oben zum gis‘‘ (= Oktavton der Alpha-Linie der Balmer-Serie) und von dort aus werden der Reihe nach zwei Naturseptimen nach unten gebildet, die zum gewünschten Ton cis‘$_{(Nr.2)}$ führen. Der Ton der Delta-Linie der Paschen-Serie liegt ziemlich genau sieben chromatische Vierteltöne[69] tiefer als der Paschen-Grenzwert (e‘ mit 332,27 Hz).

[68] Die gleichmäßige Quarte ist durch den Intervallfaktor $2^{(5/12)}$ = 1,334840 (= 500,00 Cent) charakterisiert. Der gleichmäßige Viertelton ist definiert durch den Intervallfaktor $2^{(1/24)} = 2^{0,0415557}$ = 1,029302 (= 50,00 Cent). Das Intervall zwischen dem cis‘$_{(Nr.2)}$ der Paschen-Delta-Linie und dem Stimmton fis‘ wird durch den Intervallfaktor von 1,377112 (= 553,97 Cent) bestimmt. Das Intervall ist somit um 3,93 Cent größer als eine gleichmäßige Quarte zuzüglich eines gleichmäßigen Vierteltones.

[69] Ein gleichmäßige Viertelton umfaßt 50,00 Cent, sieben gleichmäßige Vierteltöne 350,00 Cent. Das Intervall vom cis‘$_{(Nr.2)}$ der Paschen-Delta-Linie zum e‘ des Grenzwertes der Paschen-Serie umfaßt 351,34 Cent. Das sind 1,34 Cent mehr als der Intervallraum von sieben gleichmäßigen Vierteltönen mit insgesamt 350,00 Cent.

Die Paschen-Delta-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) bildet zur Balmer-Epsilon-Linie (f‘‘$_{(Nr.3)}$) das Intervall von einer Oktave und einer pythagoreischen großen Terz.[70]

Die Paschen-Delta-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) bildet zur Balmer-Alpha-Linie (gis‘) das Intervall einer septimalen übermäßigen Quinte.[71]

Die Paschen-Delta-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) bildet zur Lyman-Gamma-Linie (f‘‘‘‘) das Intervall von drei Oktaven und einer septimalen übermäßigen großen Terz.[72]

Die Paschen-Delta-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) bildet zur Lyman-Epsilon-Linie (fis‘‘‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von drei Oktaven und einer septimalen zart übermäßigen Quarte.[73]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + 2 | – 2 | + 1 | – 2 | Pa-d | 271,24 Hz | cis‘$_{(Nr.2)}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

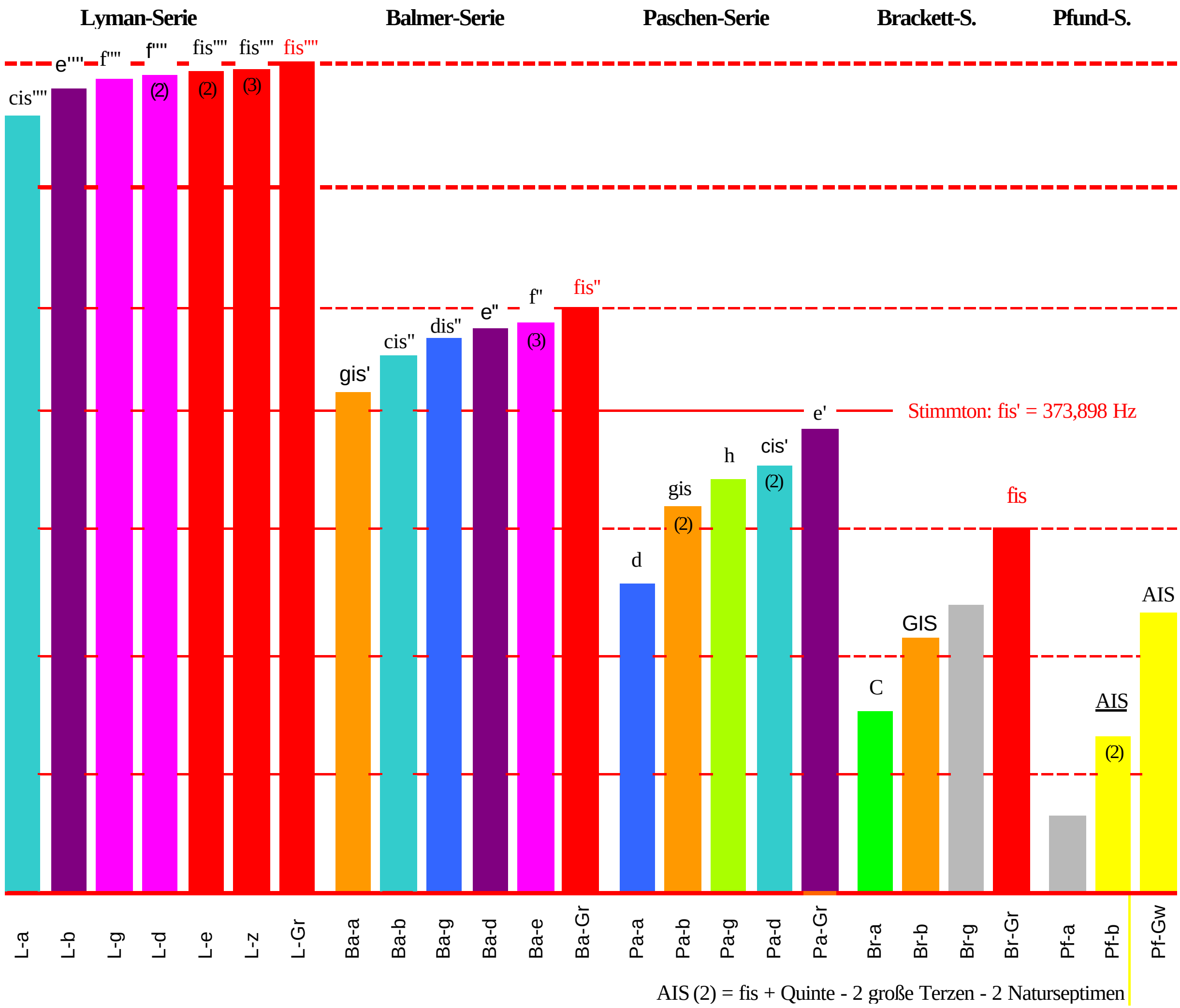
70 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen großen Terz bilden, ist 64 zu 81 respektive 1 zu 81/64 = 1,265625 (= 407,82 Cent). Das Ergänzungsintervall zur pythagoreischen großen Terz ist die pythagoreische kleinen Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer pythagoreischen kleinen Sexte bilden, ist 81 zu 128 respektive 1 zu 128/81 = 1,580247 (= 792,18 Cent).

71 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen Quinte bilden, ist 32 zu 49 respektive 1 zu 49/32 = 1,531250 (= 737,65 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen Quinte ist die septimale verminderte Quarte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten Quarte bilden, ist 49 zu 64 respektive 1 zu 64/49 = 1,306122 (= 462,35 Cent).

72 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen großen Terz bilden, ist 1.024 zu 1.323 respektive 1 zu 1.323/1.024 = 1,291992 (= 443,52 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen großen Terz ist die septimale verminderte kleine Sexte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten kleinen Sexte bilden, ist 1.323 zu 2.048 respektive 1 zu 2.048/1.323 = 1,547997 (= 756,48 Cent).

73 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen zart übermäßigen Quarte bilden, ist 256 zu 343 respektive 1 zu 343/256 = 1,339844 (= 506,48 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen zart übermäßigen Quarte ist die septimale zart verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen zart verminderten Quinte bilden, ist 343 zu 512 respektive 1 zu 512/343 = 1,492711 (= 693,52 Cent).

## 2.1.17 Quintintervall und doppeltes Terzintervall und doppeltes Naturseptimintervall – Pfund-Beta




Die Beta-Linie der Pfund-Serie (Pf-b = Pf-β) in der 40. Unteroktave liegt etwa zwei Oktaven und eine gleichschwebende (gleichmäßige) kleine Sexte[74] tieferer als die Stimmfrequenz von 373,81 Hz. Der Beta-Pfund-Linie (Pf-b) entspricht der Ton AIS$_{(Nr.2)}$ mit einer Frequenz von 58,59 Hz. Stimmtechnisch erreicht man diesen Ton, indem man vom fis‘ die Quinte zum cis‘‘ (= Beta-Linie der Balmer-Serie) bildet, dann die Unterterz zum a‘, dann die Unterterz zum f‘$_{(Nr.2)}$ (= 3. Unteroktave der Delta-Linie der Lyman-Serie), dann die Unteroktave zum f$_{(Nr.2)}$ (= 4. Unteroktave der Delta-Linie der Lyman-Serie) und von dort aus werden der Reihe nach zwei Naturseptimen nach unten gebildet, die zum gewünschten Ton AIS$_{(Nr.2)}$ führen. Der Ton der Beta-Linie der Pfund-Serie liegt eine Oktave und etwas mehr als ein Sechstelton[75] tiefer als der Pfund-Grenzwert (AIS mit 119,62 Hz).

---

[74] Die gleichmäßige kleine Sexte ist durch den Intervallfaktor $2^{(8/12)} = 2^{0,666667} = 1{,}587401$ (= 800,00 Cent) charakterisiert. Das Intervall zwischen dem AIS$_{(Nr.2)}$ der Pfund-Beta-Linie und dem FIS (2. Unteroktave des Stimmtones fis‘) wird durch den Intervallfaktor von 1,595052 (= 808,32 Cent) bestimmt. Das Intervall ist somit um 8,32 Cent größer als eine gleichmäßige kleine Sexte.

[75] Ein gleichmäßiger Sechstelton umfaßt 33,33 Cent. Das Intervall vom AIS$_{(Nr.2)}$ der Pfund-Beta-Linie zum AIS (Unteroktavton) des Grenzwertes der Pfund-Serie umfaßt 35,70 Cent. Das sind 2,37 Cent mehr als der Intervallraum von einem chromatischen Sechstelton mit 33,33 Cent. 35,70 Cent ist die Größe der septimalen übermäßigen Prime.

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zum Grenzwert der Pfund-Serie (AIS) das Intervall von einer Oktave und einer septimalen übermäßigen Prime.[76]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Brackett-Alpha-Linie (C) das Intervall einer septimalen übermäßigen großen Sekunde.[77]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Paschen-Delta-Linie (cis‘$_{(Nr.2)}$) das Intervall von zwei Oktaven und einer natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde.[78]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Paschen-Beta-Linie (gis$_{(Nr.2)}$) das Intervall von einer Oktave und einer septimalen übermäßigen kleinen Septime.[79]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Balmer-Epsilon-Linie (f‘‘$_{(Nr.3)}$) das Intervall von drei Oktaven und einer natürlichen doppelt übermäßigen Quarte.[80]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Balmer-Gamma-Linie (dis‘‘) das Intervall von drei Oktaven und einer septimalen zart übermäßigen Quarte[81]

Die Pfund-Beta-Linie (AIS$_{(Nr.2)}$) bildet zur Lyman-Zata-Linie (fis‘‘‘‘$_{(Nr.3)}$) von fünf Oktaven und einer natürlichen kleinen übermäßigen Quinte.[82]

| **Oktaven** | **Quinten** | **Terzen** | **Septimen** | **Linie** | **Frequenz** | **Ton** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| – 1 | + 1 | – 2 | – 2 | Pf-b | 58,59 Hz | AIS$_{(Nr.2)}$ |

Ausgangsfrequenz: fis‘ mit 373,81 Hz

76 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen Prime bilden, ist 48 zu 49 respektive von 1 zu 49/48 = 1,020833 (= 35,70 Cent). Die septimale verminderte Oktave ist das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen Prime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten Oktave bilden, ist 49 zu 96 respektive von 1 zu 96/49 = 1,959184 (= 1.164,30 Cent).

77 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen großen Sekunde bilden, ist 128 zu 147 respektive von 1 zu 147/128 = 1,148438 (= 239,61 Cent). Die septimale verminderte kleine Septime ist das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen großen Sekunde. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten kleinen Septime bilden, ist 147 zu 256 respektive von 1 zu 256/147 = 1,741497 (= 960,39 Cent).

78 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde bilden, ist 108 zu 125 respektive 1 zu 125/108 = 1,157407 (= 253,08 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Sekunde ist die natürliche große verminderte Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Septime bilden, ist 125 zu 216 respektive 1 zu 216/125 = 1,728000 (= 946,92 Cent).

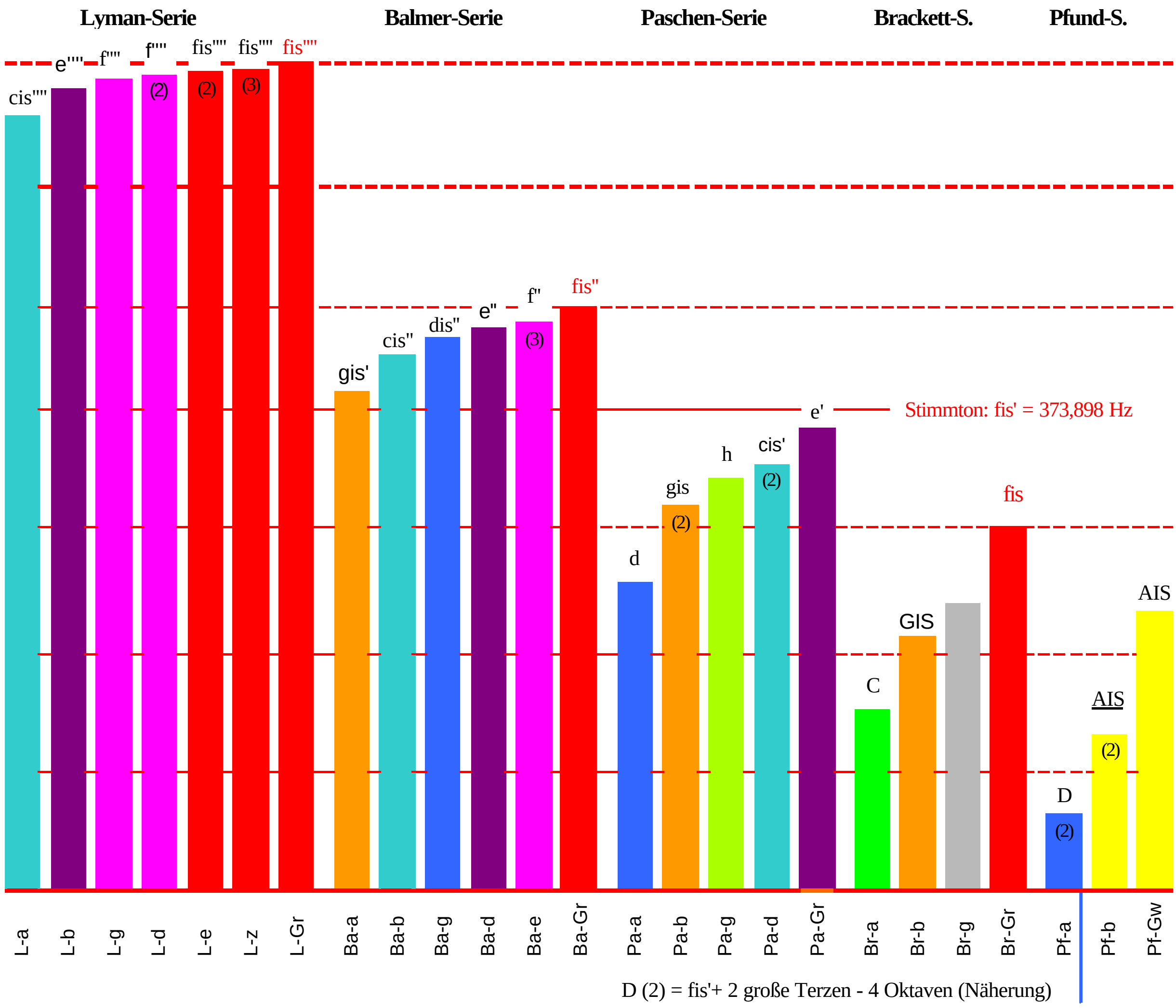
79 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen übermäßigen kleinen Septime bilden, ist 27 zu 49 respektive von 1 zu 49/27 = 1,814814 (= 1.031,79 Cent). Die septimale verminderte große Sekunde ist das Ergänzungsintervall zur septimalen übermäßigen kleinen Septime. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen verminderten großen Sekunde bilden, ist 49 zu 54 respektive von 1 zu 54/49 = 1,102041 (= 168,21 Cent).

80 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt übermäßigen Quarte bilden, ist 256 zu 375 respektive 1 zu 375/256 = 1,464844 (= 660,90 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen doppelt übermäßigen Quarte ist die natürliche doppelt verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen doppelt verminderten Quinte bilden, ist 375 zu 512 respektive 1 zu 512/375 = 1,365333 (= 539,10 Cent).

81 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen zart übermäßigen Quarte bilden, ist 256 zu 343 respektive 1 zu 343/256 = 1,339844 (= 506,48 Cent). Das Ergänzungsintervall zur septimalen zart übermäßigen Quarte ist die septimale zart verminderte Quinte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer septimalen zart verminderten Quinte bilden, ist 343 zu 512 respektive 1 zu 512/343 = 1,492711 (= 693,52 Cent).

82 Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen kleinen übermäßigen Quinte bilden, ist 16 zu 25 respektive von 1 zu 25/16 = 1,562500 (= 772,63 Cent). Das Ergänzungsintervall zur natürlichen kleinen übermäßigen Quinte ist die natürliche große verminderte Quarte. Das Frequenzverhältnis der Töne, die das Intervall einer natürlichen großen verminderten Quarte bilden ist 25 zu 32 respektive 1 zu 32/25 = 1,280000 (= 427,37 Cent).

## 2.1.18 Doppeltes Quintintervall und doppeltes Terzintervall und Überquarte – Pfund-Alpha

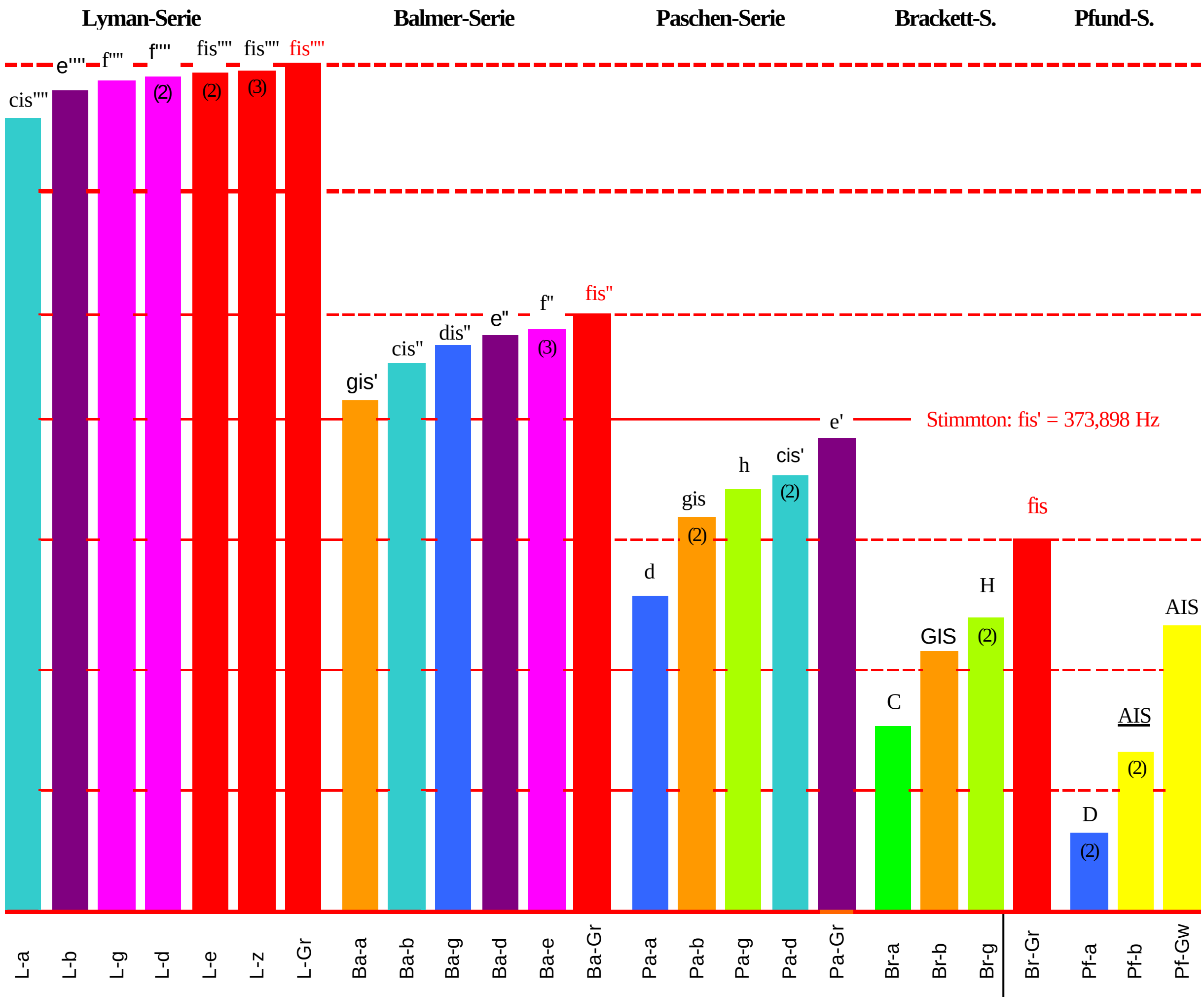



Der Stimmschlüssel zur Pfund-Alpha-Linie ist: – 2 Oktaven – 2 Quinten – 2 Terzen + 1 Überquarte. Der Stimmschlüssel zum Näherungsintervall der Überquarte ist: – 2 Oktaven + 2 Quinten + 4 Terzen. Setzt man die Werte des Näherungsintervalls in den Stimmmschlüssel zur Pfund-Alpha-Linie ein, dann erhält man den folgenden Stimmschlüssel für das Näherungsintervall

– 2 Oktaven – 2 Quinten – 2 Terzen – 2 Oktaven + 2 Quinten + 4 Terzen = – 4 Oktaven + 2 Terzen

Die genaue Beschreibung zur präzisen Einstimmung des Tones D(Nr.2) der Pfund-Alpha-Linie ist in Abschnitt 1.6 „Der elfte Teilton“ ab Seite 56 beschrieben. Siehe dort insbesondere zur Auszählung der Schwebungen die Ausführungen auf Seite 58.

### 2.1.19 Quintintervall und doppeltes Naturseptimintervall und Überquarte – Brackett-Gamma




H(2) = fis' - 3 Oktaven + 3 Quinten + 4 große Terzen - 2 Naturseptimen (Näherung)

Der Stimmschlüssel zur Brackett-Gamma-Linie ist: – 1 Oktave + 1 Quinte – 2 Naturseptimen + 1 Überquarte. Der Stimmschlüssel zum Näherungsintervall der Überquarte ist: – 2 Oktaven + 2 Quinten + 4 Terzen. Setzt man die Werte des Näherungsintervalles in den Stimmmschlüssel zur Brackett-Gamma-Linie ein, dann erhält man den folgenden Stimmschlüssel für das Näherungsintervall

$$-1\,\text{Oktave} + 1\,\text{Quinte} - 2\,\text{Naturseptimen} - 2\,\text{Oktaven} + 2\,\text{Quinten} + 4\,\text{Terzen}$$
$$= -3\,\text{Oktaven} + 3\,\text{Quinten} + 4\,\text{Terzen} - 2\,\text{Naturseptimen}$$

Die genaue Beschreibung zur präzisen Einstimmung des Tones $H_{(Nr.2)}$ der Brackett-Gamma-Linie ist in Abschnitt 1.6 „Der elfte Teilton“ ab Seite 56 beschrieben. Siehe dort insbesondere zur Auszählung der Schwebungen die Ausführungen auf Seite 58.

### 2.1.20 Centwerte aller Intervalle des Wasserstoffspektrums

Die folgenden Tabellen zeigen die Centwerte von den Intervallen zwischen den Tönen aller Spektrallinen im Wasserstoffspektrum auf. Die Oktavlagen werden in diesen Tabellen nicht berücksichtigt, das heißt, O Cent und 1.200 Cent sind in diesen Tabellen als Werte gleichwertig und austauschbar zu betrachten. Negative Werte (in roter Farbe ausgedruckt) geben (als Absolutwert) die Größe des entsprechenden Ergänzungsintervalls an.

#### Intervall-Tabelle 1

| Serie | Centwert zur | Centwerte zu den einzelnen Linien | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + Linie | Rydberg-Konst. | -L-Alpha | -L-Beta | -L-Gamma | -L-Delta | -L-Epsilon | -L-Zeta |
| **Lyman** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 498,04 | 203,91 | 111,73 | 70,67 | 48,77 | 35,70 |
| Alpha | 701,955001 | 0,00 | -294,13 | -386,31 | -427,37 | -449,27 | -462,35 |
| Beta | 996,089998 | 294,13 | 0,00 | -92,18 | -133,24 | -155,14 | -168,21 |
| Gamma | 1.088,268715 | 386,31 | 92,18 | -0,00 | -41,06 | -62,96 | -76,03 |
| Delta | 1.129,327573 | 427,37 | 133,24 | 41,06 | 0,00 | -21,90 | -34,98 |
| Epsilon | 1.151,229619 | 449,27 | 155,14 | 62,96 | 21,90 | -0,00 | -13,07 |
| Zeta | 1.164,303188 | 462,35 | 168,21 | 76,03 | 34,98 | 13,07 | -0,00 |
| **Balmer** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 498,04 | 203,91 | 111,73 | 70,67 | 48,77 | 35,70 |
| Alpha | 182,403712 | -519,55 | -813,69 | -905,87 | -946,92 | -968,83 | -981,90 |
| Beta | 701,955001 | -0,00 | -294,13 | -386,31 | -427,37 | -449,27 | -462,35 |
| Gamma | 898,153480 | 196,20 | -97,94 | -190,12 | -231,17 | -253,08 | -266,15 |
| Delta | 996,089998 | 294,13 | 0,00 | -92,18 | -133,24 | -155,14 | -168,21 |
| Epsilon | 1.052,571903 | 350,62 | 56,48 | -35,70 | -76,76 | -98,66 | -111,73 |
| **Paschen** | | | | | | | |
| Grenzwert | 996,089998 | 294,13 | 0,00 | -92,18 | -133,24 | -155,14 | -168,21 |
| Alpha | 764,915905 | 62,96 | -231,17 | -323,35 | -364,41 | -386,31 | -399,39 |
| Beta | 223,462571 | -478,49 | -772,63 | -864,81 | -905,87 | -927,77 | -940,84 |
| Gamma | 498,044999 | -203,91 | -498,04 | -590,22 | -631,28 | -653,18 | -666,26 |
| Delta | 644,751899 | -57,20 | -351,34 | -443,52 | -484,58 | -506,48 | -519,55 |
| **Brackett** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 498,04 | 203,91 | 111,73 | 70,67 | 48,77 | 35,70 |
| Alpha | 631,282574 | -70,67 | -364,81 | -456,99 | -498,04 | -519,95 | -533,02 |
| Beta | 182,403712 | -519,55 | -813,69 | -905,87 | -946,92 | -968,83 | -981,90 |
| Gamma | 515,621130 | -186,33 | -480,47 | -572,65 | -613,71 | -635,61 | -648,68 |
| **Pfund** | | | | | | | |
| Grenzwert | 427,372572 | -274,58 | -568,72 | -660,90 | -701,96 | -723,86 | -736,93 |
| Alpha | 774,780513 | 72,83 | -221,31 | -313,49 | -354,55 | -376,45 | -389,52 |
| Beta | 391,675760 | -310,28 | -604,41 | -696,59 | -737,65 | -759,55 | -772,63 |

## Intervall-Tabelle 2

| Serie | Centwert zur | Centwerte zu den einzelnen Linien | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| + Linie | Rydberg-Konst. | -Ba-Alpha | -Ba-Beta | -Ba-Gamma | -Ba-Delta | -Ba-Epsilon |
| **Lyman** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 1.017,60 | 498,04 | 301,85 | 203,91 | 147,43 |
| Alpha | 701,955001 | 519,55 | -0,00 | -196,20 | -294,13 | -350,62 |
| Beta | 996,089998 | 813,69 | 294,13 | 97,94 | 0,00 | -56,48 |
| Gamma | 1.088,268715 | 905,87 | 386,31 | 190,12 | 92,18 | 35,70 |
| Delta | 1.129,327573 | 946,92 | 427,37 | 231,17 | 133,24 | 76,76 |
| Epsilon | 1.151,229619 | 968,83 | 449,27 | 253,08 | 155,14 | 98,66 |
| Zeta | 1.164,303188 | 981,90 | 462,35 | 266,15 | 168,21 | 111,73 |
| **Balmer** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 1.017,60 | 498,04 | 301,85 | 203,91 | 147,43 |
| Alpha | 182,403712 | 0,00 | -519,55 | -715,75 | -813,69 | -870,17 |
| Beta | 701,955001 | 519,55 | -0,00 | -196,20 | -294,13 | -350,62 |
| Gamma | 898,153480 | 715,75 | 196,20 | -0,00 | -97,94 | -154,42 |
| Delta | 996,089998 | 813,69 | 294,13 | 97,94 | 0,00 | -56,48 |
| Epsilon | 1.052,571903 | 870,17 | 350,62 | 154,42 | 56,48 | -0,00 |
| **Paschen** | | | | | | |
| Grenzwert | 996,089998 | 813,69 | 294,13 | 97,94 | 0,00 | -56,48 |
| Alpha | 764,915905 | 582,51 | 62,96 | -133,24 | -231,17 | -287,66 |
| Beta | 223,462571 | 41,06 | -478,49 | -674,69 | -772,63 | -829,11 |
| Gamma | 498,044999 | 315,64 | -203,91 | -400,11 | -498,04 | -554,53 |
| Delta | 644,751899 | 462,35 | -57,20 | -253,40 | -351,34 | -407,82 |
| **Brackett** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 1.017,60 | 498,04 | 301,85 | 203,91 | 147,43 |
| Alpha | 631,282574 | 448,88 | -70,67 | -266,87 | -364,81 | -421,29 |
| Beta | 182,403712 | 0,00 | -519,55 | -715,75 | -813,69 | -870,17 |
| Gamma | 515,621130 | 333,22 | -186,33 | -382,53 | -480,47 | -536,95 |
| **Pfund** | | | | | | |
| Grenzwert | 427,372572 | 244,97 | -274,58 | -470,78 | -568,72 | -625,20 |
| Alpha | 774,780513 | 592,38 | 72,83 | -123,37 | -221,31 | -277,79 |
| Beta | 391,675760 | 209,27 | -310,28 | -506,48 | -604,41 | -660,90 |

## Intervall-Tabelle 3

| Serie + Linie | Centwertwert zur Rydberg-Konst. | Centwerte zu den einzelnen Linien -Pa-Alpha | -Pa-Beta | -Pa-Gamma | -Pa-Delta | Centwert zum -Pa-Grenzwert |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lyman** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 435,08 | 976,54 | 701,96 | 555,25 | 203,91 |
| Alpha | 701,955001 | -62,96 | 478,49 | 203,91 | 57,20 | -294,13 |
| Beta | 996,089998 | 231,17 | 772,63 | 498,04 | 351,34 | 0,00 |
| Gamma | 1.088,268715 | 323,35 | 864,81 | 590,22 | 443,52 | 92,18 |
| Delta | 1.129,327573 | 364,41 | 905,87 | 631,28 | 484,58 | 133,24 |
| Epsilon | 1.151,229619 | 386,31 | 927,77 | 653,18 | 506,48 | 155,14 |
| Zeta | 1.164,303188 | 399,39 | 940,84 | 666,26 | 519,55 | 168,21 |
| **Balmer** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 435,08 | 976,54 | 701,96 | 555,25 | 203,91 |
| Alpha | 182,403712 | -582,51 | -41,06 | -315,64 | -462,35 | -813,69 |
| Beta | 701,955001 | -62,96 | 478,49 | 203,91 | 57,20 | -294,13 |
| Gamma | 898,153480 | 133,24 | 674,69 | 400,11 | 253,40 | -97,94 |
| Delta | 996,089998 | 231,17 | 772,63 | 498,04 | 351,34 | 0,00 |
| Epsilon | 1.052,571903 | 287,66 | 829,11 | 554,53 | 407,82 | 56,48 |
| **Paschen** | | | | | | |
| Grenzwert | 996,089998 | 231,17 | 772,63 | 498,04 | 351,34 | 0,00 |
| Alpha | 764,915905 | -0,00 | 541,45 | 266,87 | 120,16 | -231,17 |
| Beta | 223,462571 | -541,45 | -0,00 | -274,58 | -421,29 | -772,63 |
| Gamma | 498,044999 | -266,87 | 274,58 | 0,00 | -146,71 | -498,04 |
| Delta | 644,751899 | -120,16 | 421,29 | 146,71 | 0,00 | -351,34 |
| **Brackett** | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 435,08 | 976,54 | 701,96 | 555,25 | 203,91 |
| Alpha | 631,282574 | -133,63 | 407,82 | 133,24 | -13,47 | -364,81 |
| Beta | 182,403712 | -582,51 | -41,06 | -315,64 | -462,35 | -813,69 |
| Gamma | 515,621130 | -249,29 | 292,16 | 17,58 | -129,13 | -480,47 |
| **Pfund** | | | | | | |
| Grenzwert | 427,372572 | -337,54 | 203,91 | -70,67 | -217,38 | -568,72 |
| Alpha | 774,780513 | 9,86 | 551,32 | 276,74 | 130,03 | -221,31 |
| Beta | 391,675760 | -373,24 | 168,21 | -106,37 | -253,08 | -604,41 |

## Intervall-Tabelle 4

| Serie | Centwert zur | Centwerte zu den einzelnen Kinien | | | | | Centw. Zum |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + Linie | Rydberg-Konst. | -Br-Alpha | -Br-Beta | -Br-Gamma | -Pf-Alpha | -Pf-Beta | -Pf-Grenz |
| **Lyman** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 568,72 | 1.017,60 | 684,38 | 425,22 | 808,32 | 772,63 |
| Alpha | 701,955001 | 70,67 | 519,55 | 186,33 | -72,83 | 310,28 | 274,58 |
| Beta | 996,089998 | 364,81 | 813,69 | 480,47 | 221,31 | 604,41 | 568,72 |
| Gamma | 1.088,268715 | 456,99 | 905,87 | 572,65 | 313,49 | 696,59 | 660,90 |
| Delta | 1.129,327573 | 498,04 | 946,92 | 613,71 | 354,55 | 737,65 | 701,96 |
| Epsilon | 1.151,229619 | 519,95 | 968,83 | 635,61 | 376,45 | 759,55 | 723,86 |
| Zeta | 1.164,303188 | 533,02 | 981,90 | 648,68 | 389,52 | 772,63 | 736,93 |
| **Balmer** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 568,72 | 1.017,60 | 684,38 | 425,22 | 808,32 | 772,63 |
| Alpha | 182,403712 | -448,88 | 0,00 | -333,22 | -592,38 | -209,27 | -244,97 |
| Beta | 701,955001 | 70,67 | 519,55 | 186,33 | -72,83 | 310,28 | 274,58 |
| Gamma | 898,153480 | 266,87 | 715,75 | 382,53 | 123,37 | 506,48 | 470,78 |
| Delta | 996,089998 | 364,81 | 813,69 | 480,47 | 221,31 | 604,41 | 568,72 |
| Epsilon | 1.052,571903 | 421,29 | 870,17 | 536,95 | 277,79 | 660,90 | 625,20 |
| **Paschen** | | | | | | | |
| Grenzwert | 996,089998 | 364,81 | 813,69 | 480,47 | 221,31 | 604,41 | 568,72 |
| Alpha | 764,915905 | 133,63 | 582,51 | 249,29 | -9,86 | 373,24 | 337,54 |
| Beta | 223,462571 | -407,82 | 41,06 | -292,16 | -551,32 | -168,21 | -203,91 |
| Gamma | 498,044999 | -133,24 | 315,64 | -17,58 | -276,74 | 106,37 | 70,67 |
| Delta | 644,751899 | 13,47 | 462,35 | 129,13 | -130,03 | 253,08 | 217,38 |
| **Brackett** | | | | | | | |
| Grenzwert | 1.200,000000 | 568,72 | 1.017,60 | 684,38 | 425,22 | 808,32 | 772,63 |
| Alpha | 631,282574 | 0,00 | 448,88 | 115,66 | -143,50 | 239,61 | 203,91 |
| Beta | 182,403712 | -448,88 | 0,00 | -333,22 | -592,38 | -209,27 | -244,97 |
| Gamma | 515,621130 | -115,66 | 333,22 | 0,00 | -259,16 | 123,95 | 88,25 |
| **Pfund** | | | | | | | |
| Grenzwert | 427,372572 | -203,91 | 244,97 | -88,25 | -347,41 | 35,70 | 0,00 |
| Alpha | 774,780513 | 143,50 | 592,38 | 259,16 | -0,00 | 383,10 | 347,41 |
| Beta | 391,675760 | -239,61 | 209,27 | -123,95 | -383,10 | 0,00 | -35,70 |

# 3 Quellenhinweise – verwendete Literatur


Allgemeine Enzyklopädie der Musik, Musik in Geschichte und Gegenwart, Bärenreiter Verlag, Kassel 1966

Ansermet, Ernest: Die Grundlagen der Musik im menschlichen Bewußtsein, Piper Verlag, München, Zürich 1986

Busch, Hermann Richard: Leonard Eulers Beitrag zur Musiktheorie (Kölner Beiträge zur Musikforschung Band LVIII), Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1970

Bussler, Ludwig: Musikalische Elementarlehre mit achtundfünfzig Aufgaben für den Unterricht an öffentlichen Lehranstalten und den Selbstunterricht, Verlag der Stubenrauchschen Buchhandlung, Berlin 1887

Cousto, Hans: Die kosmische Oktave, der Weg zum universellen Einklang, Synthesis Verlag, Essen 1984

Cousto, Hans: Klänge Bilder Welten, Musik im Einklang mit der Natur, Verlag Simon + Leutner, Berlin 1989

Dahmer, Manfred: Quin, die klassische chinesische Griffbrettzitter, Insel Verlag, Frankfurt a.M. 1985

Frosch, Reinhard: Mitteltönig ist schöner! Studien über Stimmungen von Musikinstrumenten, Peter Lang Verlag (Europäischer Verlag der Wissenschaften), Bern, Berlin, Frankfurt a.M., New York, Paris, Wien 1993

Dobretzberger, Fritz; Paul, Johannes: Farbmusiik, Leitfaden für eine kombinierte Farben- und Musiklehre, Verlag Simon + Leutner, Berlin 1993

Hindemith, Paul: Unterweisung im Tonsatz, Schott Verlag, Mainz 1940

Kayser, Hans: Orphikon, eine harmonikale Symbolik, Hrsg.: Julius Schwabe, Schwabe & Co Verlag, Basel, Stuttgart 1973

Kepler, Johannes: Weltharmonik in fünf Bänden, Beck Verlag, München 1938

Mazzola, Guerino: Geometrie der Töne, Elemente der Mathematischen Musiktheorie, Birkhäuser Verlag, Basel, Berlin, Boston 1990

Nix, Josef: Lehrgang der Stimmkunst, Verlag das Musikinstrument, Frankfurt a.M. 1972

Renold, Maria: Von Intervallen Tonleitern Tönen und dem Kammerton c = 128 Hz, Philosophisch-Antroposophischer Verlag am Goetheanum, Dornach 1985

Schüssele, Franz: Alphorn und Hirtenhorn in Europa, Gälfiäßler Verlag, Friesenheim 2000

Stroh, Wolfgang Martin: Akustik, Instrumentenkunde, neue Technologien, Tonsysteme. Ein Skriptum aus den Erfahrungen im Lehrbetrieb des Faches Musik (Fachbereich 2 Kommunikation/Ästhetik) der Carl v. Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg 1991